Лекция 23

23.1 Множества в метрическом пространстве

Пусть M — метрическое пространство, $a \in M$ и $r > 0$. Множества

$$M(a,r) \;=\; \{x \in M : \rho(a,x) < r\}, \qquad \overline{M}(a,r) \;=\; \{x \in M : \rho(a,x) \le r\}.$$

называются *открытым шаром* и *замкнутым шаром* радиуса r с центром в точке a.

Пусть S — какое-то множество точек в метрическом пространстве M. Множество S называется *ограниченным*, если оно целиком содержится в некотором шаре.

Точка $a \in S$ называется *внутренней* для S, если она содержится в S вместе с некоторым открытым шаром. Множество S называется *открытым* в M, если любая его точка является внутренней. Пустое множество по определению считается открытым.

Пусть $x \in M$ и существует последовательность точек $x^k \in S$, сходящаяся к x. В этом случае x называется *точкой прикосновения* для S. Если $x^k \ne x$ для всех k, то x называется *предельной точкой* для S. Очевидно, любая точка прикосновения, не принадлежащая множеству S, является для него предельной.

Замыканием множества S называется оно само плюс все его предельные точки. Обозначение: $[S]$. Множество S называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки: $[S] = S$. Несложно проверить, что S замкнуто в том и только в том случае, когда дополнительное в M множество $O = M \backslash S$ является открытым.

Задача. Всегда ли замыкание открытого шара совпадает с замкнутым шаром с тем же центром и радиусом?

Задача. Пусть $M = \mathbb{N}$, а расстояние между натуральными числами m,n определяется как $\rho(m,n) = 1 + \min\{1/m, 1/n\}$ при $m \ne n$ и 0 при $m = n$. Докажите, что M — полное метрическое пространство. Докажите также, что замкнутые шары

$$\overline{M}(1, 1+1/2) \supset \overline{M}(2, 1+1/3) \supset \overline{M}(3, 1+1/4) \supset \ldots$$

вложены, но имеют пустое пересечение.

Множество S называется *компактным*, если из любой последовательности точек $x^k \in S$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $x \in S$.

Ясно, что компактное множество обязано быть замкнутым. Обратное не верно: например, $S = M$ всегда является замкнутым множеством, но может и не быть компактным. Заметим также, что любое компактное множество S является ограниченным (подпоследовательность неограниченной последовательности не может быть сходящейся, так как не может быть ограниченной).

В начальных курсах анализа рассматривается метрическое пространство $\mathbb{R}$ с расстоянием $\rho(x,y) = |x - y|$, а компактным принято называть любое замкнутое и ограниченное множество точек из $\mathbb{R}$. В данном случае это определение равносильно нашему

определению компактности. Более того, мы скоро докажем, что эти два определения равносильны и в случае произвольных конечномерных нормированных пространств. Однако, в бесконечномерных пространствах замкнутость и ограниченность недостаточны для выделения сходящейся подпоследовательности.

Говоря о расстоянии в линейных пространствах, мы всегда будем полагать, что оно вводится с помощью какой-либо нормы.

Задача. Верно ли, что замыкание выпуклого множества является выпуклым? Верно ли, что множество внутренних точек выпуклого множества будет выпуклым?

23.2 Компактность и непрерывность

Вещественная функция $f(x)$, определенная для точек x метрического пространства M, называется *непрерывной* в точке $x \in M$, если для любой последовательности x^k, сходящейся к x, последовательность значений $f(x^k)$ сходится к $f(x)$.

Теорема Вейерштрасса. *Для любой вещественной функции $f(x)$, непрерывной во всех точках компактного множества S, существуют точки $x_{\min}, x_{\max} \in S$ такие, что $f(x_{\min}) \le f(x) \le f(x_{\min})$ для всех $x \in S$.*

Доказательство. Если предположить, что $f(x^k) > k$ для некоторой последовательности точек $x^k \in S$, то возникает противоречие с возможностью выделения сходящейся подпоследовательности: если $x^{k_i} \to x$, то $f(x^{k_i}) \to f(x)$, но $f(x^{k_i})$ не может сходиться, так как не является ограниченной. Поэтому $f(x)$ ограничена сверху. Пусть $c_{\max}$ — точная верхняя грань множества значений $\{f(x), x \in S\}$. Тогда для каждого k найдется точка $x^k \in S$ такая, что $c_{\max} - 1/k \le f(x^k) \le c_{\max}$. Выберем сходящуюся подпоследовательность $x^{k_i} \to x$ и перейдем в последних неравенствах к пределу $\;\Rightarrow\; f(x) = c_{\max}$.

Ограниченность снизу и существование точки минимума доказывается переходом к $g(x) = -f(x)$. □

23.3 Компактность единичной сферы

Рассмотрим единичную сферу в пространстве $\mathbb{C}^n$ относительно 2-нормы:

$$S_2 \;=\; \{x \in \mathbb{C}^n : ||x||_2 = 1\} \;=\; \{x = [x_1, \ldots, x_n]^\top : \sum_{i=1}^n |x|_i^2 = 1\}.$$

Лемма 1. *Единичная сфера S_2 в пространстве $\mathbb{C}^n$ компактна относительно 2-нормы.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность векторов

$$x^k = [x_1^k, \ldots, x_n^k]^\top \in S_2.$$

Соответствующие координатные последовательности удовлетворяют неравенствам

$$|x_1^k| \le 1, \quad |x_2^k| \le 1, \; \ldots, \; |x_n^k| \le 1.$$

Согласно лемме об ограниченных последовательностях (см. Лекцию 19), существует подпоследовательность номеров $k_1 < k_2 < \ldots$ такая, что каждая из координатных последовательностей $x_i^{k_l}$ будет сходиться и удовлетворять равенству

$$\sum_{i=1}^n |x_i^{k_l}|^2 \;=\; 1. \qquad (*)$$

Пусть $x_i = \lim\limits_{l\to\infty} x_i^{k_l}$ и $x = [x_1, \ldots, x_n]^\top$. Тогда

$$||x^{k_l} - x||_2 \;=\; \left(\sum_{i=1}^n |x_i^{k_l} - x_i|^2\right)^{1/2} \;\to 0.$$

Переходя в $(*)$ пределу, получаем $x \in S_2$. □

Лемма 2. *Для произвольной нормы $|| \cdot ||$ в пространстве $\mathbb{C}^n$ функция $f(x) = ||x||$ является непрерывной относительно 2-нормы.*

Доказательство. Пусть $x^k = [x_1^k, \ldots, x_n^k]^\top \to x = [x_1, \ldots, x_n]^\top$. Тогда, используя неравенство треугольника для норм, находим

$$|f(x^k) - f(x)| = |\,||x^k|| - ||x||\,| \;\le\; ||x^k - x|| \;\le\; \sum_{1 \le i \le n} |x_i^k - x_i|\,||e_i||,$$

где $e_i = [0, \ldots, 1, \ldots 0]^\top$ — вектор из нулей, кроме i-й компоненты, равной 1. Правая часть стремится к нулю при

$$||x^k - x||_2 \;=\; \left(\sum_{i=1}^n |x_i^k - x_i|^2\right)^{1/2} \;\to\; 0. \qquad \square$$

Лемма 3. *Для любой нормы $||\cdot||$ на $\mathbb{C}^n$ существуют константы $c_1, c_2 > 0$ такие, что*

$$c_1 \;\le\; ||x|| \;\le\; c_2 \qquad \forall \;\; x \in S_2.$$

При этом $c_1 = ||x^1||$, $c_2 = ||x^2||$ для некоторых векторов x^1, $x^2 \in S_2$.

Доказательство. Достаточно заметить, что функция $f(x) = ||x||$ непрерывна относительно 2-нормы на множестве S_2, компактном относительно 2-нормы. □

23.4 Эквивалентные нормы

Две нормы $|| \cdot ||_{(a)}$ и $|| \cdot ||_{(b)}$ на одном и том же линейном пространстве V называются *эквивалентными*, если существуют константы c_1, $c_2 > 0$ такие, что

$$c_1\,||x||_{(a)} \;\le\; ||x||_{(b)} \;\le\; c_2\,||x||_{(a)} \qquad \forall \;\; x \in V.$$

Теорема. *Если V конечномерно, то любые нормы на нем эквивалентны.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что любая норма $|| \cdot ||$ на $\mathbb{C}^n$ эквивалентна $|| \cdot ||_2$. Пусть $x \in \mathbb{C}^n \;\Rightarrow\; x/||x||_2 \in S_2$. По лемме 3, $c_1 \;\le\; ||x/||x||_2|| \;\le\; c_2 \;\Rightarrow$

$$c_1\,||x||_2 \;\le\; ||x|| \;\le\; c_2\,||x||_2 \qquad \forall \;\; x \in \mathbb{C}^n.$$

Отсюда легко вывести эквивалентность любых двух норм на $\mathbb{C}^n$.

В случае произвольного конечномерного пространства V с нормой $|| \cdot ||_V$ фиксируем в нем произвольный базис $e_1, \ldots, e_n$ и рассмотрим взаимно-однозначное соответствие

$$v \;\leftrightarrow\; [x_1, \ldots, x_n]^\top, \qquad v = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Используя его, введем норму на $\mathbb{C}^n$ следующим образом:

$$||[x_1, \ldots, x_n]^\top||_V \;\;\equiv\;\; \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|_V.$$

Свойства нормы проверяются непосредственно. Введем также еще одну норму на V:

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|_2 \;\;\equiv\;\; ||[x_1, \ldots, x_n]^\top||_2.$$

Уже установленная эквивалентность любых двух норм на $\mathbb{C}^n$ доказывает, очевидно, эквиваленость данных (а значит, и любых) норм в пространстве V. □

Следствие. *Сходимость по любой норме в конечномерном пространстве равносильна покоординатной сходимости.*

Заметим, что нам уже встречались нормы, которые не могут быть эквивалентными: это C-норма и C^1-норма в пространстве $C^1[a,b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$ вместе с первой производной:

$$||f||_C \;=\; \max_{a \le x \le b} |f(x)|, \qquad ||f||_{C^1} \;=\; \max_{a \le x \le b} (|f(x)| + |f'(x)|).$$

В самом деле, последовательность функций $f^k(x) = \sin kx/\sqrt{k}$ является сходящейся в норме C, но расходится в норме C^1. Отсюда, кстати, получаем (не очень прямое!) доказательство бесконечномерности линейного пространства $C^1[a,b]$.

23.5 Компактность замкнутых ограниченных множеств

Теорема. *В конечномерном нормированном пространстве множество является компактным тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Мы уже знаем, что компактное множество в метрическом пространстве всегда является замкнутым и ограниченным. Пусть множество S замкнуто и ограничено относительно какой-то нормы в $\mathbb{C}^n$. В силу эквивалентности норм в конечномерном пространстве, S также замкнуто и ограничено относительно 2-нормы. Поэтому любая последовательность векторов из S имеет ограниченные координатные последовательности. По лемме об ограниченных последовательностях, мы можем выбрать подпоследовательность, сходящуюся в 2-норме к какому-то вектору $x \in S$. Эта же подпоследовательность будет сходиться и относительно любой другой нормы. □

Отсюда вытекает, например, компактность единичной сферы и компактность замкнутого шара в любом конечномерном пространстве относительно любой нормы.

23.6 Наилучшие приближения

Пусть $x \in V$ и L — непустое множество векторов из V. Величину

$$\gamma \;=\; \inf_{z \in L} ||x - z||$$

называют *расстоянием* между x и L. Вектор $z_0 \in L$ называется *элементом наилучшего приближения* для x на L, если $\gamma = ||x - z_0||$.

Лемма о наилучшем приближении. *Пусть L — конечномерное подпространство*

Лекция 24

24.1 Евклидово пространство

Пусть V — вещественное линейное пространство, на котором каждой упорядоченной паре векторов $x, y \in V$ поставлено в соответствие вещественное число (x, y) таким образом, что:

(1) $(x,x) \ge 0 \ \ \forall \ \ x \in V$; $\ (x,x) = 0 \ \ \Leftrightarrow \ \ x = 0$;

(2) $(x,y) = (y,x) \ \ \forall \ \ x,y \in V$;

(3) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z) \ \ \forall \ \ x,y,z \in V$;

(4) $(\alpha x, y) = \alpha(x,y) \ \ \forall \ \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \ \forall \ \ x \in V$.

Число (x,y) называется *скалярным произведением* векторов x и y. Вещественное линейное пространство со скалярным произведением называется *евклидовым*.

В $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение векторов $x = [x_1, \ldots, x_n]^\top$, $y = [y_1, \ldots, y_n]^\top$ часто вводится как сумма парных произведений координат:

$$(x,y) \ = \ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ = \ y^\top x. \qquad (*)$$

Оно называется *естественным* скалярным произведением на $\mathbb{R}^n$. Но на $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение можно ввести и многими другими способами: например, если фиксировать числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$, то выражение

$$(x,y) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i \ = \ y^\top \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} x$$

обладает свойствами (1)–(4) и, следовательно, задает скалярное произведение.

24.2 Унитарное пространство

В $\mathbb{C}^n$ выражение $(*)$, очевидно, уже не является скалярным произведением: пусть $n = 2$ и $x = [1, \mathbf{i}]^\top$, тогда $(x,x) = 1^2 + \mathbf{i}^2 = 0$. Вообще в ненулевом комплексном пространстве аксиомы (1), (4) не совместимы с аксиомой (2): $(\mathbf{i}x, \mathbf{i}x) = -(x,x) \ \ \Rightarrow \ \$ если $(x,x) > 0$, то $(\mathbf{i}x, \mathbf{i}x) < 0$.

Пусть V — комплексное линейное пространство. Теперь при определении скалярного произведения (x,y) предполагается, что число (x,y) в общем случае комплексное, а набор аксиом модифицируется таким образом:

(1′) $(x,x) \ge 0 \ \ \forall \ \ x \in V$; $\ (x,x) = 0 \ \ \Leftrightarrow \ \ x = 0$;

(2′) $(x,y) = \overline{(y,x)} \ \ \forall \ \ x,y \in V$ (черта означает комплексное сопряжение);

(3′) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z) \ \ \forall \ \ x,y,z \in V$;

(4′) $(\alpha x, y) = \alpha(x,y) \ \ \forall \ \ \alpha \in \mathbb{C}, \ \ \forall \ \ x \in V$.

Комплексное линейное пространство со скалярным произведением называется *унитарным*.

Аксиомы евклидова и унитарного пространств отличаются лишь комплекным сопряжением во второй аксиоме и, конечно, тем, что в вещественном пространстве все числа и само скалярное произведение вещественны. Заметим, что то в любом случае *скалярный квадрат* (x,x) обязан быть неотрицательным вещественным числом.

В отличие от $(*)$, в $\mathbb{C}^n$ *естественное* скалярное произведение векторов $x = [x_1, \ldots, x_n]^\top$, $y = [y_1, \ldots, y_n]^\top$ вводится так:

$$(x,y) \ = \ \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \ = \ y^* x.$$

24.3 Билинейные и полуторалинейные формы

В аксиомах скалярного произведения свойства (3), (4) отражают линейность функции (x,y) от векторов x и y по первому аргументу. В евклидовом пространстве аксиома (2) дает нам линейность и по второму аргументу.

Функция $f(x,y)$ называется *билинейной формой*, если она линейна по каждому из аргументов:

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z), \quad (z, \alpha x + \beta y) = \alpha(z,x) + \beta(z,y) \ \ \forall \ \ x,y,z \in V, \ \ \forall \ \ \alpha, \beta.$$

Таким образом, скалярное произведение в евклидовом пространстве является билинейной формой с дополнительными условиями (1) и (2).

Функция $f(x,y)$ называется *полуторалинейной формой*, если

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z), \quad (z, \alpha x + \beta y) = \overline{\alpha}(z,x) + \overline{\beta}(z,y) \ \ \forall \ \ x,y,z \in V, \ \ \forall \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Очевидно, скалярное произведение в унитарном пространстве является полуторалинейной формой с дополнительными условиями (1′) и (2′).

24.4 Длина вектора

Пусть V — произвольное пространство со скалярным произведением. Величина

$$|x| = \sqrt{(x,x)}$$

называется *длиной* вектора $x \in V$.

Неравенство Коши–Буняковского–Шварца. *Для любых векторов* $x, y \in V$

$$|(x,y)| \ \le \ |x|\,|y|, \qquad (*)$$

причем равенство достигается в том и только том случае, когда x и y линейно зависимы.

Доказательство. Комплексное число (x,y) запишем в тригонометрической форме

$$(x,y) = |(x,y)|\,\xi, \quad \xi \ = \ \cos\phi + \mathbf{i}\sin\phi.$$

Если $y = 0$, то в $(*)$ имеет место равенство. Пусть $y \ne 0$. Для произвольного $t \in \mathbb{R}$ рассмотрим выражение

$$(x + t\xi y,\, x + t\xi y) \ = \ (x,x) + t\xi\overline{(x,y)} + t\overline{\xi}(x,y) + \xi\overline{\xi}(y,y) \ = \ t^2|y|^2 + 2t|(x,y)| + |x|^2 \ \ge \ 0.$$

Неотрицательность квадратного трехчлена от переменной t означает неположительность его дискриминанта:

$$D = |(x,y)|^2 - |x|^2|y|^2 \ \le \ 0 \ \ \Rightarrow \ \ |(x,y)| \ \le \ |x|\,|y|.$$

Предположим, что при $y \ne 0$ в $(*)$ имеет место равенство $\ \Rightarrow \ \ D = 0 \ \ \Rightarrow \ $ для некоторого вещественного t получаем

$$(x + t\xi y,\, x + t\xi y) \ = \ 0 \ \ \Rightarrow \ \ x + t\xi y = 0.$$

Очевидно также, что если $y = 0$ или $x = \alpha y$, то $(*)$ обращается в равенство. □

Следствие. *Длина является векторной нормой на V.*

Доказательство. Первые два свойства нормы очевидны, а неравенство треугольника вытекает из неравенства Коши-Буняковского-Шварца:

$$|x+y|^2 \ = \ |x|^2 + |y|^2 + (x,y) + (y,x) \ \le \ |x|^2 + |y|^2 + 2|x|\,|y| \ = \ (|x| + |y|)^2. \qquad \square$$

Пространство со скалярным произведением, полное относительно нормы $||\cdot|| = |\cdot|$, обычно называется *гильбертовым*.

Задача. Для двух векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполнено равенство $||x+y||_2 = ||x||_2 + ||y||_2$. Докажите, что x и y линейно зависимы. Верно ли это в случае равенства $||x+y||_p = ||x||_p + ||y||_p$ для нормы Гельдера при $p \ne 2$?

Задача. Для матриц $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ квадрат суммы диагональных элементов матрицы $A^\top B$ равен произведению сумм диагональных элементов матриц $A^\top A$ и $B^\top B$. Докажите, что A и B отличаются лишь скалярным множителем.

Задача. Пусть V — линейное пространство вещественных непрерывных на $[0,1]$ функций. Докажите, что выражение $(f,g) = \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$ есть скалярное произведение и при этом V не является полным.

24.5 Тождество параллелограмма

Итак, любое пространство со скалярным произведением обладает специальной нормой, порожденной скалярным произведением. Зададим вопрос: какие нормы на V могут порождаться каким-нибудь скалярным произведением?

Ответ связан со следующим *тождеством параллелограмма*:

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 \ = \ 2(||x||^2 + ||y||^2) \ \ \ \forall \ \ x, y \in V.$$

Легко проверить, что длина вектора $||x|| = |x|$ (то есть, норма, порожденная скалярным произведением) удовлетворяет данному тождеству. Но верно и обратное.

Теорема. *Норма $||\cdot||$ порождается каким-то скалярным произведением в том и только том случае, когда для нее выполняется тождество параллограмма.*

Доказательство. Пусть V — пространство со скалярным произведением. Запишем $(x,y) = a + \mathbf{i}b$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда если $||x|| = |x|$, то

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= (x,x) + (x,y) + (y,z) + (y,y) &&= ||x||^2 + ||y||^2 + 2a, \\ ||x+\mathbf{i}y||^2 &= (x,x) + \mathbf{i}(y,x) - \mathbf{i}(x,y) + (y,y) &&= ||x||^2 + ||\mathbf{i}y||^2 + 2b. \end{aligned}$$

Отсюда $a = f(x,y)$ и $b = g(x,y)$, где

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2), \qquad g(x,y) = \frac{1}{2}(||x+\mathbf{i}y||^2 - ||x||^2 - ||\mathbf{i}y||^2).$$

Теперь предположим, что V — нормированное пространство. Если норма порождается скалярным произведением, то последнее обязано иметь вид

$$(x,y) \ = \ f(x,y) + \mathbf{i}g(x,y). \qquad (*)$$

Рассмотрим $(*)$ как определение функции (x,y) и докажем, что она обладает всеми свойствами скалярного произведения.

Легко видеть, что $(x,x) = ||x||^2$. Поэтому первая аксиома очевидна. Так же легко проверяется, что $(x,y) = \overline{(y,x)}$: равенство $f(x,y) = f(y,x)$ очевидно, а равенство $g(x,y) = -g(y,x)$ получается с помощью тождества параллелограмма.

Теперь предположим, что норма удовлетворяет тождеству параллелограмма и докажем, что функция (x,y) линейна по первому аргументу (третья и четвертая аксиомы). Для этого достаточно доказать линейность по первому аргументу функции $f(x,y)$ (линейность $g(x,y)$ по первому аргументу будет очевидным следствием).

Докажем сначала, что $f(x+y,z) = f(x,z) + f(y,z)$. Из определения f и тождества параллелограмма видно, что

$$f(x,z) = \frac{1}{4}(||x+z||^2 - ||x-z||^2), \qquad f(y,z) = \frac{1}{4}(||y+z||^2 - ||y-z||^2).$$

Запишем $\ x + z = u + v, \ \ y + z = u - v \ \Rightarrow \ u = \frac{1}{2}(x + y + 2z), \ \ v = \frac{1}{2}(x - y)$. В силу тождества параллелограмма для векторов u и v,

$$||x+z||^2 + ||y+z||^2 \ = \ \frac{1}{2}(||(x+y+z)+z||^2 + \frac{1}{2}||x-y||^2.$$

Аналогично,

$$||x-z||^2 + ||y-z||^2 \ = \ \frac{1}{2}(||(x+y-z)-z||^2 + \frac{1}{2}||x-y||^2.$$

По тому же тождеству параллелограмма для $x+y+z$ и z,

$$\frac{1}{2}(||(x+y+z)+z||^2 \ = \ ||x+y+z||^2 + ||z||^2 - \frac{1}{2}||x+y||^2,$$

$$\frac{1}{2}(||(x+y-z)-z||^2 \ = \ ||x+y-z||^2 + ||z||^2 - \frac{1}{2}||x+y||^2.$$

Отсюда

$$f(x,z)+f(y,z)=\frac{1}{4}(||x+y+z||^2-||x+y-z||^2)=f(x+y,z).$$

Теперь докажем, что $f(\alpha x,y)=\alpha\, f(x,y)$ для любого $\alpha\in\mathbb{R}$. Пусть $\alpha=\frac{m}{n}$ — рациональное число. Тогда, пользуясь уже доказанным свойством, находим

$$n\, f(\tfrac{1}{n}\,x,\,y) \;=\; f(n\,(\tfrac{1}{n}\,x),\,y) \;=\; f(x,y) \;\;\Rightarrow\;\; f(\tfrac{1}{n}\,x,\,y) \;=\; \tfrac{1}{n}\,f(x,y) \;\;\Rightarrow$$

$$f(\tfrac{m}{n}\,x,\,y)=f(m(\tfrac{1}{n}\,x,\,y)=m\,f(\tfrac{1}{n}\,x,\,y)=\tfrac{m}{n}\,f(x,y).$$

Произвольное вещественное α представим как предел последовательности рациональных $\alpha_k\to\alpha$. Несложно убедиться в том, что функция $f(x,y)$ непрерывна по x. Поэтому в равенствах $f(\alpha_k x,y)=\alpha_k f(x,y)$ можно перейти к пределу при $k\to\infty$.

Таким образом, мы доказали равенство $(\alpha x,y)=(\alpha x,y)$ пока только для вещественных α. Оно будет верно для любых комплексных α, если мы установим, что $(\mathbf{i}x,y)=\mathbf{i}(x,y)$. Это вытекает непосредственно из определения $(*)$, вида функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$ и тождества параллелограмма. □

Задача. По определению, $||f(x)||_{C[a,b]}\equiv\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$. Докажите, что эта норма в пространстве $C[a,b]$ функций, непрерывных на $[a,b]$, не порождается никаким скалярным произведением.

Задача. Найдите все $p\ge 1$, при которых норма Гельдера $||\cdot||_p$ порождается некоторым скалярным произведением.

24.6 Ортогональность векторов

Скалярное произведение позволяет ввести общее понятие ортогональности векторов: x и y называются *ортогональными*, если $(x,y)=0$. Обозначение: $x\perp y$.

Заметим, что в одном и том же пространстве скалярное произведение можно ввести многими разными способами, и векторы, ортогональные для какого-то скалярного произведения, могут быть не ортогональными по отношению к другому скалярному произведению.

В евклидовом пространстве можно ввести также общее понятие *угла* $\phi=\phi(x,y)$ между векторами x и y. По определению,

$$\cos\phi \;=\; \frac{(x,y)}{|x|\,|y|}.$$

Нужно заметить, что правая часть по модулю не больше 1 (в силу неравенства Коши-Буняковского-Шварца). Для ортогональных векторов $\phi=\pi/2$. По понятной причине данное определение угла *не переносится* на случай унитарных пространств. Но понятие ортогональности работает, конечно, и там.

Теорема Пифагора. *Если $x\perp y$, то $|x+y|^2=|x|^2+|y|^2$.*

Доказательство. Пусть $(x,y)=0$. Тогда $(x+y,x+y)=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)=(x,x)+(y,y)$. □

Замечание. В евклидовом (но не в унитарном!) пространстве теорему Пифагора можно обратить: если $|x+y|^2=|x|^2+|y|^2$, то $(x,y)=0$ — это очевидно, поскольку $(x,y)+(y,x)=2(x,y)$. Однако, последнее не верно для произвольных векторов в унитарном пространстве.

24.7 Ортогональность множеств

Пусть V — пространство со скалярным произведением и $L\subset V$ — произвольное непустое подмножество векторов. Вектор $x\in V$ называется *ортогональным* множеству L, если $(x,y)=0$ для всех $y\in L$. Обозначение: $x\perp L$. По определению, множества L и M *ортогональны*, если $(x,y)=0$ для любых $x\in L$ и $y\in M$. Обозначение: $L\perp M$.

Множество M всех векторов из V, каждый из которых ортогонален заданному множеству L, называется его *ортогональным дополнением* в пространстве V. Обозначение: $M=L^\perp$.

Утверждение. *Для любого множества L его ортогональное дополнение $L^\perp$ является подпространством. При этом $L\subset(L^\perp)^\perp$.*

Доказательство. Пусть $x,y\in L^\perp$. Тогда $(x,z)=(y,z)=0\ \ \forall\ z\in L\ \ \Rightarrow\ \ (\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)=0\ \ \forall\ \ z\in L\ \ \Rightarrow\ \ \alpha x+\beta y\in L^\perp$.

По определению, множество $(L^\perp)^\perp$ содержит все векторы, ортогональные $L^\perp$, а значит, и все векторы из множества L. □

24.8 Ортогональная сумма подпространств

Напомним, что *суммой подпространств* $L_1,\,L_2,\,\dots,\,L_m$ называется множество L всех векторов вида $x=x_1+x_2+\ldots+x_m$, где $x_i\in L_i$ для всех i. Элементарно проверяется, что L — подпространство. Обозначение: $L=L_1+\ldots+L_m$.

Напомним также, что L называется *прямой суммой*, если подпространства L_i ненулевые и каждый вектор $x\in L$ имеет единственное разложение вида $x=x_1+\ldots+x_m$, где $x_i\in L_i$ (если $x=x_1'+\ldots+x_m'$ и $x_i'\in L_i\ \ \forall\ i$, то непременно $x_i'=x_i\ \ \forall\ i$).

Сумма $L=L_1+\ldots+L_m$ ненулевых подпространств называется *ортогональной суммой*, если $L_i\perp L_j$ при $i\ne j$. Обозначение: $L=L_1\oplus\ldots\oplus L_m$.

Утверждение. *Ортогональная сумма подпространств $L=L_1\oplus\ldots\oplus L_m$ является прямой суммой. Кроме того, если $x_i\in L_i$, то*

$$|x_1+\ldots+x_m|^2 \;=\; |x_1|^2+\ldots+|x_m|^2. \qquad (*)$$

Доказательство. Докажем сначала $(*)$. Учитывая, что $(x_i,x_j)=0$ при $i\ne j$, находим

$$|x_1+\ldots+x_m|^2 \;=\; \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m(x_i,x_j) \;=\; \sum_{i=1}^m(x_i,x_i)=\sum_{i=1}^m|x_i|^2.$$

Далее, пусть $x_1+\ldots+x_m=x_1'+\ldots+x_m'$, где $x_i,x_i'\in L_i\ \ \forall\ i$. Тогда

$$0=|(x_1-x_1')+\ldots+(x_m-x_m')|^2=|x_1-x_1'|^2+\ldots+|x_m-x_m'|^2\ \ \Rightarrow\ \ x_i=x_i'\ \ \forall\ \ i. \qquad \square$$

Следствие 1. *Конечная система ненулевых попарно ортогональных векторов является линейно независимой.*

Доказательство. Пусть векторы $x_1,\dots,x_m$ попарно ортогональны и отличны от нуля. Тогда сумма линейных оболочек $L(x_1),\dots,L(x_m)$ является ортогональной суммой, и если $\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_mx_m=0$, то, согласно $(*)$,

$$0=|\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_mx_m|^2 \;=\; |\alpha_1|^2|x_1|^2+\ldots+|\alpha_m|^2|x_m|^2\ \ \Rightarrow\ \ \alpha_1=\ldots=\alpha_m=0. \qquad \square$$

Следствие 2. *Если ненулевые подпространства $L_1,\dots,L_m$ конечномерны и попарно ортогональны, то*

$$\dim(L_1\oplus\ldots\oplus L_m)=\dim L_1+\ldots+\dim L_m.$$

Достаточно вспомнить, что для прямой суммы конечномерных подпространств L_i базис получается объединением базисов в подпространствах L_i (см. Лекцию 12).

Лекция 25

25.1 Матрица Грама

Пусть дана система векторов $v_1,\,\dots,\,v_n$ и пусть

$$x=\alpha_1v_1+\ldots+\alpha_nv_n,\quad y=\beta_1v_1+\ldots+\beta_nv_n.$$

Тогда прямое вычисление дает

$$(x,y)=\sum_{j=1}^n\overline{\beta}_j\left(\sum_{i=1}^n(v_j,v_i)\alpha_j\right)=b^*Ga, \qquad (*)$$

где

$$G=G(v_1,\dots,v_n) \;=\; \begin{bmatrix}(v_1,v_1) & \dots & (v_n,v_1)\\ \dots & \dots & \dots\\ (v_1,v_n) & \dots & (v_n,v_n)\end{bmatrix},\qquad a=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \dots\\ \alpha_n\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \dots\\ \beta_n\end{bmatrix}.$$

Матрица G из скалярных произведений системы векторов называется ее *матрицей Грама.* [1]

Теорема о матрице Грама. *Система векторов $v_1,\dots,v_n$ линейно зависима тогда и только тогда, когда ее матрица Грама вырожденная.*

Доказательство. Пусть $x=\alpha_1v_1+\ldots+\alpha_nv_n$. Используя $(*)$ при $x=y$, находим

$$(x,x) \;=\; a^*Ga,\quad a=[\alpha_1,\dots,\alpha_n]^\top. \qquad (\#)$$

Если G — вырожденная матрица, то существует столбец $a\ne0$ такой, что $Ga=0\ \ \Rightarrow\ \ x=0\ \ \Rightarrow$ система векторов $v_1,\dots,v_n$ линейно зависима.

Обратно, если эта система линейно зависима, то $x=0$ при некотором $a\ne0$. Легко видеть, что $Ga=[(x,v_1),\dots,(x,v_n)]^\top=0$ есть равная нулю нетривиальная линейная комбинация столбцов матрицы $G\ \ \Rightarrow$ столбцы G линейно зависимы $\ \Rightarrow\ G$ вырожденная. □

Задача. В пространстве со скалярным произведением даны две системы векторов $u_1,\,\dots,\,u_m$ и $v_1,\,\dots,\,v_m$. При этом $L^\perp\cap M=\{0\}$, где L и M — линейные оболочки векторов первой и второй системы. Докажите, что хотя бы одна из этих систем линейно зависима в том и только том случае, когда $m\times m$-матрица A с элементами $a_{ij}=(v_j,u_i)$ вырожденная.

[1] Обратим внимание на то, что элемент в позиции i,j имеет вид (v_j,v_i). Часто матрицей Грама называют $G^\top$ (в вещественном случае, конечно, $G^\top=G$).

Используя его, введем норму на $\mathbb{C}^n$ следующим образом:

$$||[x_1, \ldots, x_n]^\top||_V \;\equiv\; \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\|_V .$$

Свойства нормы проверяются непосредственно. Введем также еще одну норму на V:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\|_2 \;\equiv\; ||[x_1, \ldots, x_n]^\top||_2.$$

Уже установленная эквивалентность любых двух норм на $\mathbb{C}^n$ доказывает, очевидно, эквиваленость данных (а значит, и любых) норм в пространстве V. $\square$

Следствие. *Сходимость по любой норме в конечномерном пространстве равносильна поокоординатной сходимости.*

Заметим, что нам уже встречались нормы, которые не могут быть эквивалентными: это C-норма и C^1-норма в пространстве $C^1[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$ вместе с первой производной:

$$||f||_C \;=\; \max_{a \le x \le b} |f(x)|, \qquad ||f||_{C^1} \;=\; \max_{a \le x \le b} (|f(x)| + |f'(x)|).$$

В самом деле, последовательность функций $f^k(x) = \sin kx/\sqrt{k}$ является сходящейся в норме C, но расходится в норме C^1. Отсюда, кстати, получаем (не очень прямое!) доказательство бесконечномерности линейного пространства $C^1[a, b]$.

23.5 Компактность замкнутых ограниченных множеств

Теорема. *В конечномерном нормированном пространстве множество является компактным тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Мы уже знаем, что компактное множество в метрическом пространстве всегда является замкнутым и ограниченным. Пусть множество S замкнуто и ограничено относительно какой-то нормы в $\mathbb{C}^n$. В силу эквивалентности норм в конечномерном пространстве, S также замкнуто и ограничено относительно 2-нормы. Поэтому любая последовательность векторов из S имеет ограниченные координатные последовательности. По лемме об ограниченных последовательностях, мы можем выбрать подпоследовательность, сходящуюся в 2-норме к какому-то вектору $x \in S$. Эта же подпоследовательность будет сходиться и относительно любой другой нормы. $\square$

Отсюда вытекает, например, компактность единичной сферы и компактность замкнутого шара в любом конечномерном пространстве относительно любой нормы.

23.6 Наилучшие приближения

Пусть $x \in V$ и L — непустое множество векторов из V. Величину

$$\gamma \;=\; \inf_{z \in L} ||x - z||$$

называют *расстоянием* между x и L. Вектор $z_0 \in L$ называется *элементом наилучшего приближения* для x на L, если $\gamma = ||x - z_0||$.

Лемма о наилучшем приближении. *Пусть L — конечномерное подпространство*

в нормированном пространстве V. Тогда для любого $x \in V$ существует вектор $z_0 \in L$ такой, что $||x - z_0|| \le ||x - z|| \;\; \forall \;\; z \in L$.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим любой вектор z такой, что $||x - z|| \le \gamma + \varepsilon$. Отсюда $||z|| \le R \equiv \gamma + \varepsilon + ||x||$. Поэтому очевидно, что

$$\gamma \;=\; \inf_{z \in L,\; ||z|| \le R} ||x - z||.$$

Функция $f(z) = ||x - z||$ непрерывна на замкнутом шаре $||z|| \le R$ конечномерного пространства L. По теореме Вейерштрасса, $\gamma = ||x - z_0||$ для некоторого $z_0 \in L$. $\square$

Заметим, что существование элемента наилучшего приближения очевидно также для компактных множеств L.

Из леммы о наилучшем приближении вытекает, в частности, что для всякой непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ существует многочлен $p_n(x)$ степени не выше n такой, что для любого многочлена $g_n(x)$ степени не выше n имеет место неравенство

$$||f(x) - p_n(x)||_{C[a,b]} \;\le\; ||f(x) - g_n(x)||_{C[a,b]}.$$

Многочлены такого типа называются *многочленами наилучшего равномерного приближения* для $f(x)$ и впервые были изучены П. Л. Чебышевым (кстати, в связи с практической задачей механики). [1]

Задача. Докажите, что функция $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ при $-1 \le x \le 1$ является многочленом степени n со старшим коэффициентом 2^{n-1}. Докажите также, что для любого многочлена $p_n(x)$ степени n с тем же старшим коэффициентом выполняется неравенство $||T_n(x)||_{C[-1,1]} \le ||p_n(x)||_{C[-1,1]}$. [2]

[1] В частности, многочлен $p_{n-1}(x)$ для функции $f(x) = x^n \in C[-1, 1]$ имеет вид $p_{n-1}(x) = x^n - 2^{1-n} \cos(n \arccos x)$, $\;-1 \le x \le 1$.

[2] Говорят, что многочлены $T_n(x)$ *наименее уклоняются от нуля* (среди всех многочленов той же степени и с тем же старшим коэффициентом). Многочлены $T_n(x)$ называются *многочленами Чебышева*.

В случае $\dim L(u_1, ..., u_m) = \dim L(v_1, ..., v_m) = m$ отсюда ясно, что $\hat{V} = (\hat{U}^{-1})^*$.

Утверждение 1. *В случае биортогональности каждая из систем $u_1, \ldots, u_m$ и $v_1, \ldots, v_m$ является линейно независимой.*

Доказательство. Пусть $z \equiv \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m = 0$. Используя биортогональность, находим $(z, v_i) = \alpha_i = 0$. $\square$

Утверждение 2. *Пусть $L, M \subset V$ — подпространства размерности m такие, что $L^\perp \cap M = \{0\}$. Тогда для любой линейно независимой системы $u_1, \ldots, u_m \in L$ существует единственная биортогональная система $v_1, \ldots, v_m \in M$.*

Доказательство. Фиксируем какой-либо ортонормированный базис в пространстве $L + M$. Тогда задача сводится к нахождению матрицы $\hat{V}$ из уравнения $(*)$. Пусть матрица $\hat{Q}$ имеет столбцы, составленные из коэффициентов разложений векторов какого-либо базиса в M по данному фиксированному базису в $L + M$. Тогда $\hat{V} = \hat{Q} Z$ для некоторой матрицы Z порядка m, которая должна удовлетворять матричному уравнению

$$Z^* \hat{Q}^* \hat{U} = I.$$

Столбцы квадратной матрицы $\hat{Q}^* \hat{U}$ линейно независимы. В самом деле, если $\hat{Q}^* \hat{U} x = 0$, то $\hat{U} x \in L^\perp \cap M \;\;\Rightarrow\;\; \hat{U} x = 0$. В силу линейной независимости столбцов матрицы $\hat{U}$, $x = 0$. Поэтому матрица $\hat{Q}^* \hat{U}$ невырожденная $\;\;\Rightarrow\;\; Z^* = (\hat{Q}^* \hat{U})^{-1}$. $\square$

25.8 *QR*-разложение матрицы

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ имеет линейно независимые столбцы $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}^n$ и к ним применяется процесс ортогонализации Грама–Шмидта с использованием естественного скалярного произведения.. Пусть в результате получаются ортонормированные векторы $q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{C}^m$.

Соотношения $a_k \in L(q_1, \ldots, q_k)$ выполняются при $k = 1, \ldots, m$ и означают, что для каких-то чисел r_{ik} имеют место равенства

$$a_k \;=\; \sum_{i=1}^{k} r_{ik}\, q_i, \quad k = 1, \ldots, m,$$

или, в матричном виде,

$$A \;=\; QR, \quad Q = [q_1, \ldots, q_m], \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1m} \\ & r_{22} & \ldots & r_{2m} \\ & & \ddots & \ldots \\ & & & r_{mm} \end{bmatrix}.$$

Определение. Разложение $A = QR$, где Q имеет ортонормированные столбцы, а R — верхняя треугольная матрица, называется *QR-разложением* матрицы A.

Таким образом, мы только что доказали, что *для любой прямоугольной матрицы с линейно независимыми столбцами существует QR-разложение.* В частности, оно

существует для любой невырожденной матрицы. В действительности справедлива более общая

Теорема. *Любая прямоугольная матрица, в которой число строк не меньше числа столбцов, обладает QR-разложением с верхней ступенчатой матрицей R.*

Доказательство. Пусть a_{i_1} — первый ненулевой столбец матрицы A, a_{i_2} — первый столбец такой, что $a_{i_2} \notin L(a_{i_1})$, a_{i_3} — первый столбец такой, что $a_{i_3} \notin L(a_{i_1}, a_{i_2})$, и так далее. В итоге получаем в A базисную систему столбцов

$$a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}, \quad i_1 < i_2 < \ldots < i_r,$$

обладающую такими свойствами:

$$a_j = 0 \;\text{ при }\; j < i_1;$$

$$a_j \in L(a_{i_1}, \ldots, a_{i_l}) \;\text{ при }\; i_l < j < i_{l+1}, \quad l = 1, \ldots, r-1;$$

$$a_j \in L(a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}) \;\text{ при }\; i_r < j.$$

Найдем QR-разложение

$$[a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}] = [q_{i_1}, \ldots, q_{i_r}] R_r.$$

Систему столбцов $q_{i_1}, \ldots, q_{i_r}$ дополним до ортонормированного базиса в n-мерном пространстве столбцов и из полученных столбцов составим матрицу Q, сохранив первоначальные столбцы в позициях $i_1, \ldots, i_r$.

Записав $A = QR$, видим, что в матрице R первые r элементов i_l-го столбца те же, что в l-м столбце матрицы R_r. В то же время, j-й столбец при $i_l < j < i_{l+1}$ имеет нули в позициях ниже i_l-й. $\square$

Задача. Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ имеет столбцы $a_1, \ldots, a_n \in C^n$. Докажите неравенство

$$|\det A| \;\le\; \prod_{j=1}^{n} ||a_j||_2.$$

Задача. Пусть A — матрица порядка n с элементами $a_{ij} = \pm 1$. Докажите, что если $|\det A| = n^{n/2}$ (такие матрицы называются *матрицами Адамара*) и $n \ge 3$, то n делится на 4.

Лекция 26

26.1 Линейные функционалы

Пусть V — линейное пространство над числовым полем P и $f(x)$ — функция от вектора $x \in V$ с числовыми значениями. Такие функции принято называть *функционалами*. Если выполняется *свойство линейности*

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \quad \forall \;\; \alpha, \beta \in P, \;\; \forall \;\; x, y \in V,$$

то функция f называется *линейным функционалом* или *линейной формой*.

Пусть теперь V — нормированное пространство[1]. Линейный функционал называется *ограниченным*, если для некоторой константы $c > 0$

$$|f(x)| \;\le\; c||x||_V \quad \forall \;\; x \in V. \tag{$*$}$$

Утверждение 1. *Для ограниченности линейного функционала необходима и достаточна его непрерывность.*

Доказательство. Если выполняется $(*)$, то из сходимости $||x_k - x||_V \to 0$ при $k \to \infty$ следует, что $|f(x_k) - f(x)| = |f(x_k - x)| \le c||x_k - x||_V \to 0$.

Если линейный функционал $f(x)$ непрерывен, то покажем, что он ограничен на единичной сфере $S = \{x : ||x||_V = 1\}$. Если это не так, то для какой-то последовательности векторов $x_k \in S$ имеем $|f(x_k)| \to \infty$.

Отсюда $||x_k/|f(x_k)|\,||_V \;\to\; 0 \;\Rightarrow\; x_k/|f(x_k)| \;\to\; 0$. В силу непрерывности, $f(x_k/|f(x_k)|) \to f(0) = 0$, что невозможно, так как $|f(x_k/|f(x_k)|)| = |f(x_k)|/|f(x_k)| = 1$.

Итак, $|f(x)| \le c$ для всех x таких, что $||x||_V = 1$. Следовательно,

$$|f(x/||x||_V)| \le c \quad \Rightarrow \quad |f(x)| \le c||x||_V \;\; \forall \;\; x \in V. \qquad \square$$

Замечание. Для линейного функционала непрерывность в какой-то одной точке равносильна непрерывности во всех точках пространства.

Утверждение 2. *Если V конечномерно, то любой линейный функционал на V является ограниченным.*

Доказательство. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — базис в V. Если $x = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$, то

$$|f(x)| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,|f(v_i)| \le c \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad c \equiv \max_{1 \le i \le n} |f(v_i)|.$$

[1] Значит, $P = \mathbb{C}$ или $P = \mathbb{R}$.

В конечномерном пространстве из сходимости по норме вытекает покоординатная сходимость. Поэтому если $x^k \to 0$ при $k \to \infty$, то $x_i^k \to 0$. Отсюда $|f(x^k)| \to 0$. Значит, функционал непрерывен при $x = 0$. $\square$

Задача. Линейный функцонал f определен на пространстве векторов вида Ax, где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $x \in \mathbb{R}^m$. Докажите, что $f(Ax) = y^\top Ax$ для некоторого $y \in \mathbb{R}^m$, не зависящего от x.

26.2 Сопряженное пространство

Операции сложения и умножения на число для линейных функционалов определяются естественным образом.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — линейные функционалы на V. Тогда их суммой называется функция $h = f + g : V \to \mathbb{C}$, определенная правилом $h(x) \equiv f(x) + g(x)$. Для $\alpha \in \mathbb{C}$ функция $h = \alpha f : V \to \mathbb{C}$ определяется правилом $h(x) \equiv \alpha f(x)$.

Элементарно проверяется, что $f + g$ и αf остаются линейными функционалами. Таким образом, множество всех всех линейных функционалов на V превращается в линейное пространство.

Особый интерес представляет множество всех ограниченных линейных функционалов. Оно тоже является линейным пространством, поскольку сложение и умножение на число непрерывных функций сохраняют свойство непрерывности.

Линейное пространство всех ограниченных линейных функционалов на V называется *сопряженным пространством* для V. Обозначение: V^*.

Нормой функционала $f \in V^*$ называется величина

$$||f|| \;=\; \sup_{||x||_V = 1} |f(x)|.$$

Конечность $||f||$ вытекает из ограниченности f. Аксиомы векторной нормы проверяются очевидным образом.

Задача. Пусть ϕ — линейный функционал на сопряженном пространстве V^* для конечномерного пространства V. Докажите, что $\phi(f) = f(x_0)$, где $x_0 \in V$ — некоторый фиксированный вектор, зависящий от ϕ и не зависящий от $f \in V^*$.

26.3 Примеры линейных функционалов

(1) Пусть $\mathcal{P}$ — линейное пространство всех вещественных многочленов на отрезке $[-1, 1]$ с C-нормой $||p||_C = \sup\limits_{-1 \le x \le 1} |p(x)|$. Пусть $p'(x)$ обозначает производную многочлена $p(x)$ (ясно, что $p' \in \mathcal{P}$). Функционал $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, заданный правилом

$$f(p) \equiv p'(1), \quad p \in \mathcal{P},$$

является, очевидно, линейным, но не ограниченным: если $p_n(x) = x^n$, то $||p_n||_C = 1$ и $f(p_n) = n$.

Задача. Докажите, что функционал $f(p) = p'(0)$ также не будет ограниченным.

(2) В том же пространстве $\mathcal{P}$ функционал $f(p) = p(0)$ является ограниченным линейным функционалом.

(3) Функционал $f(p) = \int\limits_{-1}^{1} p(x)dx$ является линейным и ограниченным на $\mathcal{P}$.

(4) Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^n$ с любой нормой, и пусть даны числа $c_1, \ldots, c_n$. Пусть $x = [x_1, \ldots, x_n]^\top \in \mathbb{C}^n$ и $f(x) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$. Это ограниченный линейный функционал на $\mathbb{C}^n$.

26.4 Размерность дополнительного пространства

Множество $L = \{x \in V : f(x) = 0\}$ называется *ядром* или *нуль-пространством* линейного функционала $f : V \to \mathbb{C}$. Обозначение: $L = \ker f$. Легко видеть, что L — подпространство. Если $\dim V = n$ и функционал не равен нулю тождественно, то $\dim L = n - 1$ (докажите!). Мы собираемся доказать, что в бесконечномерном случае конечной (и равной 1) оказывается размерность так называемого дополнительного подпространства.

Подпространство L' в пространстве V называется *дополнительным* для подпространства L, если разложение $V = L + L'$ является прямой суммой. Размерность дополнительного пространства называется *коразмерностью* подпространства L.

Если V конечномерно, то его базис можно получить объединением базисов в L и L'. Поэтому $\dim L' = \dim V - \dim L \;\Rightarrow\;$ коразмерность одна и та же для любого дополнительного пространства. То же верно и в бесконечномерном случае.

Скажем, что $a \sim b$, если $a - b \in L$. Это отношение эквивалентности на V. Поэтому V разбивается на множество непересекающихся классов эквивалентности.

Пусть классы $[a]$ и $[b]$ порождены векторами a и b. Естественные определения операций сложения и умножения на число

$$[a] + [b] = [a + b], \quad \alpha[a] = [\alpha a]$$

корректны, так как их результаты не зависят от выбора представителей в классах эквивалентности. Таким образом, множество классов эквивалентности превращается в линейное пространство над тем же полем, что и пространство V. Оно называется *фактор-пространством*. Обозначение: V/L.

Утверждение. *Любое дополнительное для L подпространство изоморфно фактор-пространству V/L.*

Доказательство. Для $a \in L'$ пусть $\Phi(a) = [a]$. Очевидно, отображение $\Phi : L' \to V/L$ сохраняет операции и $\Phi(L) = V/L$. Кроме того, если $\Phi(a) = \Phi(b)$, то $a \sim b \;\Rightarrow\; a - b \in L$ и одновременно $a - b \in L' \;\Rightarrow\; a - b = 0$. Значит, Φ — сохраняющее операции взаимно-однозначное отображение L' на V/L — другими словами, изоморфизм. $\square$

Следствие. *Для любых двух разложений в прямую сумму $V = L + L' = L + L''$ размерности дополнительных пространств L' и L'' одинаковы.*

26.5 Линейные функционалы и гиперплоскости

Пусть $L = \ker f$. Если $L = V$, то функционал тождественно равен нулю (и поэтому называется нулевым или тривиальным).

Пусть $L \ne V$. Тогда существует вектор x_0, для которого $f(x_0) \ne 0$. Для произвольного вектора $x \in V$ находим

$$f(x - \alpha x_0) = 0 \;\text{ при }\; \alpha = f(x)/f(x_0) \quad \Rightarrow \quad x = z + \alpha x_0, \;\; z \in L.$$

Очевидно, α однозначно определяется условием $z \in L$. Поэтому V есть прямая сумма подпространств L и $L(x_0)$. Таким образом, *ядро нетривиального линейного функционала имеет коразмерность, равную 1.*

Теперь рассмотрим множество $M_c = \{x \in V : f(x) = c\}$. Если $f(x_0) = c$, то, очевидно, $M_c = x_0 + L$. Таким образом, M_c есть линейное многообразие с направляющим пространством L коразмерности 1. В таких случаях линейное многообразие называется *гиперплоскостью*. Легко видеть, что отображение $f(x) \mapsto M(f) = \{x \in V : f(x) = 1\}$ является взаимно-однозначным соответствием между линейными функционалами и гиперплоскостями.

Пусть $\dim V = n$ и $e_1, \ldots, e_n$ — базис в V. В данном случае ясно, что любой линейный функционал имеет вид $f(x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$, где $c_i = f(e_i)$. Таким образом, любая гиперплоскость в n-мерном пространстве имеет вид

$$c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = c, \tag{$*$}$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — координаты разложения вектора по выбранному базису.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЧАСТЬ

26.6 Опорные гиперплоскости

Уравнение гиперплоскости $(*)$ в $\mathbb{R}^n$ удобно записывать в виде

$$(x, h) = c, \quad \text{где} \quad h = [c_1, \ldots, c_n]^\top.$$

Гиперплоскость, проходящая через точку x_0, задается уравнением $(x, h) = (x_0, h)$. Под скалярным произведением здесь понимается естественное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — некоторое множество. Точка $x_0 \in M$ называется *граничной* для M, если в любой ее окрестности имеются точки $u \in M$ и $v \notin M$. Для определенности под окрестностью точки можно понимать шар относительно 2-нормы (важно, что метрика должна порождаться нормой, а все нормы на $\mathbb{R}^n$ эквивалентны).

Гиперплоскость $\pi : (x, h) = (x_0, h)$, проходящая через граничную точку $x_0 \in M$, называется *опорной гиперплоскостью* для M, если $(x, h) \le (x_0, h) \;\; \forall \;\; x \in M$.

Задача. Докажите, что множество всех внутренних точек выпуклого множества в нормированном пространстве является выпуклым.

Задача. Докажите, что любая внутренняя точка замыкания выпуклого множества S в конечномерном нормированном пространстве принадлежит S. Верно ли это в случае произвольного множества S?

Задача. Пусть M — выпуклое множество. Докажите, что гиперплоскость, проходящая через его граничную точку, является опорной для M тогда и только тогда, когда она не содержит ни одной внутренней точки множества M.

Лемма о наилучшем приближении на выпуклом множестве. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое выпуклое множество. Тогда для любой точки $x \notin M$ существует единственная точка $z_0 \in M$ такая, что*

$$|x - z_0| \;=\; \rho \equiv \inf_{z \in M} |x - z|.$$

При этом $(x - z_0,\, z - z_0) \le 0 \ \ \forall \ \ z \in M$.

Доказательство. [2] Пусть $|x - z_k| \to \rho, \ \ z_k \in M$. В силу ограниченности длин $|z_k|$, найдется подпоследовательность $z_{k_l} \to z_0 \in M$. Положим $h = x - z_0$. С помощью предельного перехода получаем $|h| = \rho$. Далее, если $z \in M$ и $v \equiv z - z_0$, то, в силу выпуклости M, $z_0 + \varepsilon v \in M$ для всех $0 \le \varepsilon \le 1$. Следовательно,

$$\rho^2 \le |x - (z_0 + \varepsilon v)|^2 = (h - \varepsilon v, h - \varepsilon v) = \rho^2 - 2\varepsilon (h, v) + \varepsilon^2 |v|^2 \ \ \Rightarrow$$

$$(h, v) \le \varepsilon |v|^2/2 \ \ \forall \ \ 0 < \varepsilon \le 1 \quad \Rightarrow \quad (h, v) \le 0.$$

Если $|x - (z_0 + v)| = \rho$, то $|v|^2 = 2(h, v) \le 0 \ \ \Rightarrow \ \ v = 0$. □

Теорема 1. *Через любую граничную точку замкнутого выпуклого множества* $M \subset \mathbb{R}^n$ *проходит хотя бы одна опорная гиперплоскость для* M.

Доказательство. Любая граничная точка $x_0 \in M$ есть предел некоторой последовательности внешних для M точек: $x_k \to x_0, \ \ x_k \notin M$. В силу леммы, для каждой точки x_k существует элемент наилучшего приближения $z_k \in M$: $|x_k - z_k| \le |x_k - z|$ и $(x_k - z_k, z - z_k) \le 0 \ \forall \ z \in M$. Отсюда $(p_k, z) \le (p_k, z_k)$, где $p_k = h_k/|h_k|$, $h_k = x_k - z_k$. Из последовательности векторов p_k выберем подпоследовательность, сходящуюся к некоторому вектору p; очевидно, $|p| = 1$. Кроме того, $|z_k - x_0| \le |z_k - x_k| + |x_k - x_0| \le 2|x_k - x_0| \ \Rightarrow \ z_k \to x_0$. Поэтому для любой точки $z \in M$ выполняется неравенство $(z, p) \le (x_0, p)$. □

Теорема 2. *Пусть* $L, M \subset \mathbb{R}^n$ *— выпуклые множества и при этом множество внутренних точек для* L *не пусто* [3] *и не пересекается с* M. *Тогда существует гиперплоскость* $(x, h) = c$ *такая, что*

$$(u, h) \le c \le (v, h) \quad \forall \ \ u \in L, \quad \forall \ \ v \in M.$$

Доказательство. Пусть L_0 — множество внутренних точек для L. Легко проверить, что множество $K = L_0 - M = \{z \in \mathbb{R}^n : z = u - v, u \in L, v \in M\}$ выпукло и при этом $0 \notin K$. Отсюда можно заключить, что точка 0 не является внутренней точкой для замыкания множества K. Если 0 является граничной точкой для K, искомой является проходящая через 0 опорная гиперплоскость для K. Если 0 является внешней точкой для замыкания K, то нужная гиперплоскость строится с помощью леммы о наилучшем приближении на выпуклом множестве. □

Замечание. Говорят, что выпуклые множества L и M *разделяются* с помощью линейного функционала $f(x)$, если $f(x) \le f(y)$ для любых $x \in L$ и $y \in M$. Теорема 2 утверждает, что функционал с таким свойством существует. В такой формулировке она не использует скалярные произведения и остается верной без предположения о

[2] Другое доказательство, справедливое для замкнутых выпуклых множеств в произвольных (в том числе, бесконечномерных) *гильбертовых пространствах* (то есть, полных пространствах со скалярным произведением) фактически содержится в доказательстве обобщения теоремы о перпендикуляре в дополнении к лекции 25 (раздел 55.2).

[3] Выпуклое множество, имеющее хотя бы одну внутреннюю точку, называется *выпуклым телом*.

конечномерности пространства. [4]

Задача. Дано замкнутое выпуклое множество $M \subset \mathbb{R}^n$ и $x_0 \notin M$. Доказать, что существует гиперплоскость $(x, h) = (x_0, h)$ такая, что $(x, h) < (x_0, h) \ \ \forall \ \ x \in M$.

Задача. Множество называется *выпуклым конусом*, если вместе с любыми двумя точками x и y оно содержит все точки вида $\alpha x + \beta y$ при произвольных $\alpha, \beta \ge 0$. Докажите, что любая опорная гиперплоскость для выпуклого конуса проходит через 0.

Задача. В пространстве $\mathbb{R}^n$ с естественным скалярным произведением $(x, y) = y^\top x$ дано компактное выпуклое множество M и для него построено множество K всех векторов $y \in \mathbb{R}^n$ таких, что $(x, y) \ge 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Докажите, что K — замкнутый выпуклый конус. Докажите также, что для любой его опорной гиперплоскости с нормальным вектором h проходящая через 0 прямая с направляющим вектором h содержит точку из M.

Задача. В $\mathbb{R}^n$ с естественным скалярным произведением компактные выпуклые множества L и M таковы, что для всякого $x \in M$ с каким-то $y = y(x) \in L$ выполняется неравенство $(x, y) \ge 0$. Докажите, что можно выбрать $y_0 \in L$, для которого $(x, y_0) \ge 0$ для всех $x \in M$.

Задача. Даны компактные выпуклые множества $L \subset \mathbb{R}^m$, $M \subset \mathbb{R}^n$ и матрица $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Доказать, что

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \min_{y \in \mathbb{R}^m} y^\top A x \ = \ \min_{y \in \mathbb{R}^m} \max_{x \in \mathbb{R}^n} y^\top A x.$$

Задача. Пусть $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$. Докажите, что пересечение полупространств

$$a_1^\top x \le c_1, \ \ldots, \ a_m^\top x \le c_m$$

пусто тогда и только тогда, когда для некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \ge 0$ выполняются равенства

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_m a_m = 0, \qquad \alpha_1 c_1 + \ldots + \alpha_m c_m = -1.$$

[4] В этом случае доказательство требует особой техники, связанной с вопросами продолжения линейных функционалов и теоремами Хана–Банаха.

Лекция 27

27.1 Линейные операторы

Любую матрицу $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ можно естественным образом рассматривать как оператор, отображающий вектор $x \in \mathbb{C}^n$ в вектор $Ax \in \mathbb{C}^m$. Этот оператор очевидно обладает *свойством линейности* [1]

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay \quad \forall \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \forall \ \ x, y \in \mathbb{C}^n.$$

То же свойство линейности выполняется для многих очень важных отображений в линейных пространствах, элементами которых являются функции, объединенные каким-либо общим признаком (непрерывность, дифференцируемость и т.п.). Прежде всего, нужно сказать об отображениях, связанных с дифференцированием и интегрированием функций. Таким образом, поводов к тому, чтобы изучить свойство линейности с более общих позиций более чем достаточно.

Определение. Пусть V и W — произвольные линейные пространства над одним и тем же полем P. Отображение $\mathcal{A} : V \to W$ со свойством

$$\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{A}(x) + \beta \mathcal{A}(y) \quad \forall \ \ \alpha, \beta \in P, \quad \forall \ \ x, y \in V,$$

называется *линейным оператором* из V в W. В случае линейных операторов аргумент принято писать без скобок: $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}x$.

27.2 Непрерывность и ограниченность

Пусть V и W — нормированные пространства. Отображение $\mathcal{A} : V \to W$ называется *непрерывным в точке* $x \in V$, если для любой последовательности $x_k \in V$ такой, что $x_k \to x$ при $k \to \infty$, последовательность образов $\mathcal{A}(x_k)$ сходится к $\mathcal{A}(x)$:

$$||x_k - x||_V \to 0 \ \ \Rightarrow \ \ ||\mathcal{A}(x_k) - \mathcal{A}(x)||_W \to 0.$$

Отображение называется *непрерывным* на V, если оно непрерывно для всех $x \in V$.

Линейный оператор $\mathcal{A} : V \to W$ называется *ограниченным*, если для некоторой константы $c > 0$

$$||\mathcal{A}x||_W \le c||x||_V \quad \forall \ \ x \in V.$$

[1] Это свойство можно рассматривать также как свойство *сохранения операций* при отображении одного линейного пространства в другое пространство над тем же полем. Такие отображения называются *гомоморфизмами*.

Теорема. *Для непрерывности линейного оператора необходима и достаточна его ограниченность.*

Доказательство. Достаточность очевидна из неравенства

$$||\mathcal{A}x_k - \mathcal{A}x||_W = ||\mathcal{A}(x_k - x)||_W \le c||x_k - x||_V.$$

Чтобы доказать необходимость, рассмотрим множество значений нормы $||\mathcal{A}x||_W$ на единичной сфере $S = \{x : ||x||_V = 1\}$. Предположим, что это множество не ограничено. Тогда существует последовательность $x_k \in S$ такая, что $||\mathcal{A}x_k||_W \to \infty$. Положим $y_k = x_k / ||\mathcal{A}x_k||_W$ и заметим, что

$$||y_k||_V = 1/||\mathcal{A}x_k||_W \to 0 \ \ \Rightarrow \ \ ||\mathcal{A}y_k||_W \to 0.$$

Последнее невозможно, так как $||\mathcal{A}y_k||_W = 1$ для всех k. Значит, для какого-то $c > 0$

$$||\mathcal{A}x||_W \le c \ \ \forall \ \ x \in S \quad \Rightarrow \quad ||\mathcal{A}x||_W \le c||x||_V \ \ \forall \ \ x \in V. \qquad \square$$

27.3 Операторная норма

Утверждение 1. *Множество* $\mathcal{L}(V, W)$ *всех ограниченных линейных операторов из* V *в* W *является линейным пространством (над общим для* V *и* W *полем).*

Доказательство. Пусть $||\mathcal{A}x||_W \le c_1||x||_V$, $||\mathcal{B}x||_W \le c_2||x||_V$. Тогда для любых чисел α и β

$$||(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})x||_W \le c||x||_V, \qquad c = |\alpha|c_1 + |\beta|c_2. \qquad \square$$

Утверждение 2. *Величина*

$$||\mathcal{A}|| \ \equiv \ \sup_{||x||_V = 1} ||\mathcal{A}x||_W, \quad \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W), \qquad (*)$$

является нормой на линейном пространстве $\mathcal{L}(V, W)$.

Доказательство. Очевидно, величина $||\mathcal{A}||$ имеет конечное значение и, конечно, неотрицательна. Если $||\mathcal{A}|| = 0$, то $||\mathcal{A}x||_W = 0$ на единичной сфере $||x||_V = 1 \ \Rightarrow \ ||\mathcal{A}x||_W = 0 \ \forall \ x \in V \ \Rightarrow \ \mathcal{A}x = 0 \ \forall \ x \in V \ \Rightarrow \ \mathcal{A} = 0$. Положительная однородность следует из равенства

$$||\alpha\mathcal{A}x||_W = |\alpha| \, ||\mathcal{A}x||_W,$$

а неравенство треугольника — из неравенства

$$||(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})x||_W \le |\alpha| \, ||\mathcal{A}x||_W + |\beta| \, ||\mathcal{B}x||_W. \qquad \square$$

Определение. Норма $(*)$ для операторов $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, W)$ называется *операторной нормой* или нормой, *подчиненной* векторным нормам $||\cdot||_V$, $||\cdot||_W$.

Утверждение 3. *Если* V *— конечномерное пространство, то любой линейный оператор* $\mathcal{A} : V \to W$ *является ограниченным и* $||\mathcal{A}|| = ||\mathcal{A}x_0||_W$ *для некоторого (зависящего от* $\mathcal{A}$*) вектора* $x_0 \in V$ *с нормой* $||x_0||_V = 1$.

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в V и $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Тогда $||x||_{(e)} \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i|$ есть норма на V, эквивалентная любой другой норме, в том числе и норме $||x||_V$. Поэтому для какого-то $c > 0$

$$||x||_{(e)} \le c||x||_V \quad \forall \ \ x \in V.$$

Следовательно,

$$||\mathcal{A}x||_W \le \sum_{i=1}^{} |\alpha_i| \max_{1 \le i \le n} ||\mathcal{A}e_i||_W = ||x||_{(e)} \max_{1 \le i \le n} ||\mathcal{A}e_i||_W$$

$$\le (c \max_{1 \le i \le n} ||\mathcal{A}e_i||_W) \ ||x||_V \qquad \forall \ \ x \in V.$$

Чтобы доказать существование x_0, достаточно учесть компактность единичной сферы в конечномерном пространстве, непрерывность на ней функции $||\mathcal{A}x||_W$ и теорему Вейерштрасса. $\square$

Если фиксировано $1 \le p \le \infty$ и в качестве нормы в пространстве $\mathbb{C}^n$ выбрана p-норма Гельдера, то соответствующую операторную норму матрицы A принято обозначать $||A||_p$.

Задача. Пусть $A = [a_{ij}]$ — матрица размеров $m \times n$. Докажите, что

$$||A||_\infty \ = \ \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad ||A||_1 \ = \ \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|.$$

Задача. Пусть $u, v \in \mathbb{C}^n$. Докажите, что $||uv^\top||_2 = ||u||_2 ||v||_2$.

27.4 Матричная норма

Пусть каждой комплексной матрице A поставлено в соответствие неотрицательное число $f(A)$ таким образом, что:

(1) $f(A)$ является нормой на $\mathbb{C}^{m \times n}$ для всех m, n;

(2) $f(AB) \le f(A) f(B)$ для любых матриц A и B, допускающих умножение.

В таких случаях $f(A)$ называется *матричной нормой.*

Утверждение. *Пусть для каждого n задана векторная норма на $\mathbb{C}^n$, и пусть для каждых m, n и каждой матрицы $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ норма $||A||$ определена как операторная норма, порожденная данными векторными нормами. Тогда $||A||$ является матричной нормой.*

Доказательство. Пусть $||x||_*$ обозначает векторную норму для $x \in \mathbb{C}^n$ при любом n. Для любых матриц A и B, допускающих умножение, существует вектор x_0 единичной нормы такой,

$$||AB|| \ = \ ||ABx_0||_* \ \le \ ||A|| \, ||Bx_0||_* \ \le \ ||A|| \, ||B|| \, ||x_0||_* \ = \ ||A|| \, ||B||. \qquad \square$$

Задача. Может ли норма подматрицы быть больше нормы матрицы?

Задача. Дана обратимая матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, выбирается произвольная матрица $X_0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и строится последовательность матриц $X_{k+1} = 2X_k - X_k A X_k, \quad k = 0, 1, \ldots$. Докажите, что если для некоторой матричной нормы $||I - AX_0|| < 1$, то $X_k \to A^{-1}$ при $k \to \infty$.

27.5 Норма Фробениуса

Пусть $A = [a_{ij}]$ — матрица размеров $m \times n$. Величина

$$||A||_F \ = \ \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

называется *нормой Фробениуса* или *евклидовой нормой* матрицы A.

Утверждение. *Норма Фробениуса является матричной нормой.*

Доказательство. Для каждых m, n норма Фробениуса является нормой на линейном пространстве $\mathbb{C}^{m \times n}$ (как 2-норма на пространстве $\mathbb{C}^{mn}$, изоморфном $\mathbb{C}^{m \times n}$). Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — столбцы матрицы A, а $b_1^\top, \ldots, b_n^\top$ — строки матрицы B. Тогда

$$AB \ = \ a_1 b_1^\top + \ldots + a_n b_n^\top.$$

Используя неравенство треугольника, легко проверяемые равенства $||a_i b_i^\top||_F = ||a_i||_F ||b_i||_F$ и неравенство Коши–Буняковского–Шварца, находим

$$||AB||_F \le \sum_{i=1}^{n} ||a_i b_i^\top||_F = \sum_{i=1}^{n} ||a_i||_F ||b_i||_F$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{n} ||a_i||_F^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} ||b_i||_F^2 \right)^{1/2} = ||A||_F ||B||_F. \qquad \square$$

Замечание. Норма Фробениуса не может быть операторной нормой на $\mathbb{C}^{m \times n}$ ни при каком выборе векторных норм в пространствах $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$ — дело в том, что операторная норма единичной матрицы должна быть равна 1.

Задача. Доказать, что при любом фиксированном $c > 1$ величина

$$||A|| \ = \ \max\{|a_{11}| + c|a_{12}|, \ |a_{22}| + c|a_{21}|\}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

определяет в пространстве 2×2-матриц норму с неравенством $||AB|| \le ||A|| ||B||$, справедливым для любых 2×2-матриц A и B. Является ли она операторной нормой?

27.6 Сохранение норм

Линейный ограниченный оператор $\mathcal{A} : V \to V$ со свойством

$$||\mathcal{A}x|| = ||x|| \quad \forall \ \ x \in V$$

называется *изометрическим* или *сохраняющим норму.* Сразу же заметим, что сохранение какой-то одной нормы не означает сохранение другой нормы.

Пусть в $\mathbb{C}^n$ задана какая-то норма, а матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (как линейный оператор из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$) ее сохраняет. Такую матрицу будем называть изометрической относительно данной нормы.

Утверждение. *Множество всех комплексных $n \times n$-матриц, изометрических относительно гельдеровской 2-нормы, совпадает с множеством унитарных матриц порядка n.*

Доказательство. Очевидно, 2-норма порождается естественным скалярным произведением в $\mathbb{C}^n$. Из наших исследований, связанных с тождеством параллелограмма,

вытекает, что сохранение длин влечет за собой сохранение скалярных произведений:

$$(Ax, Ay) = (x, y) \quad \Leftrightarrow \quad y^*(A^*A)x = y^*x \quad \forall \ \ x, y \in \mathbb{C}^n.$$

Отсюда $y^*(A^*A - I)x = 0$ для все $x, y \in \mathbb{C}^n$. Выбирая в качестве x и y векторы стандартного базиса, приходим к выводу о том, что все элементы матрицы $A^*A - I$ равны нулю. Таким образом, сохранение 2-нормы равносильно условию $A^*A = I$, определяющем унитарную матрицу. $\square$

Замечание. Множество матриц, сохраняющих p-норму в случае $p \ne 2$, значительно беднее. Попробуйте доказать, что для всех $p \ne 2$ оно одно и то же и совпадает с множеством матриц вида DP, где D — диагональная унитарная матрица, а P — матрица перестановки.

27.7 Унитарно инвариантные нормы

Матричная норма $|| \cdot ||$ называется *унитарно инвариантной*, если $||PAQ|| = ||A||$ для любой матрицы A и любых унитарных матриц P и Q, допускающих умножение.

Утверждение 1. *Норма Фробениуса является унитарно инвариантной.*

Доказательство. Пусть Q — унитарная матриц и $A = [a_1, \ldots, a_n]$. Тогда

$$||Qa_j||_2 = ||a_j||_2, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Отсюда

$$||QA||_F^2 = \sum_{j=1}^{n} ||Qa_j||_2^2 = \sum_{j=1}^{n} ||a_j||_2^2 = ||A||_F^2. \qquad \square$$

Заметим, что при изучении метода вращений (в связи с упрощением вида уравнений для поверхностей 2-го порядка) мы уже использовали факт сохранения суммы квадратов элементов вещественной матрицы при умножении ее слева и справа на ортогональные матрицы.

Рассмотрим еще матричную норму, подчиненную гельдеровской 2-норме:

$$||A|| = \sup_{||x||_2 = 1} ||Ax||_2.$$

Данная норма называется *спектральной нормой* матрицы (смысл названия через некоторое время прояснится). Обозначение: $||A||_2$.

Утверждение 2. *Спектральная норма матрицы является унитарно инвариантной.*

Доказательство. Пусть Q — унитарная матриц и $A = [a_1, \ldots, a_n]$. По определению,

$$||A||_2 = \sup_{||x||_2 = 1} ||Ax||_2 = \sup_{||x||_2 = 1} ||(QA)x||_2 = ||QA||_2.$$

Кроме того,

$$||AQ||_2 = \sup_{||x||_2 = 1} ||(AQ)x||_2 = \sup_{||Q^*x||_2 = 1} ||(AQ)(Q^*x)||_2 = \sup_{||x||_2 = 1} ||(Ax)||_2 = ||A||_2. \qquad \square$$

27.8 Сингулярное разложение матрицы

В 70-х годах 19-го века независимо и почти одновременно Бельтрами (1873) и Жордан (1874) открыли, что любую квадратную матрицу можно привести к диагональному виду с помощью умножения слева и справа на унитарные матрицы. Различные вопросы, связанные с данным открытием, в том числе его обобщения, стали затем предметом целого ряда исследований. Не будет сильным преувеличением сказать, что данный факт оказался потрясающе полезным и одним из наиболее востребованных в теории матриц и приложениях линейной алгебры.

В действительности то же верно и для прямоугольной матрицы. С помощью умножения на унитарные матрицы она приводится к прямоугольной матрице тех же размеров, имеющей всюду нули, кроме элементов с индексами $i = j$. Такие матрицы будем называть *диагональными прямоугольными* матрицами. Итак, речь идет о разложении вида

$$A = V \Sigma U^*, \qquad (*)$$

где A — заданная $m \times n$-матрица, U и V — унитарные матрицы соответственно порядка m и n, а Σ — диагональная прямоугольная $m \times n$-матрица, имеющая при $i = j$ неотрицательные числа

$$\sigma_1 \ \ge \ \sigma_2 \ \ge \ \ldots \ \ge \ \sigma_{\min(m,n)}.$$

Разложение $(*)$ называется *сингулярным разложением* матрицы A. Числа σ_i называются *сингулярными числами* матрицы A.

Теорема. *Сингулярное разложение $A = V \Sigma U^*$ существует для любой комплексной прямоугольной матрицы A. Если A вещественная, то матрицы U и V можно выбрать вещественными.*

Доказательство. Положим $\sigma_1 = ||A||_2 = \sup\limits_{x \ne 0} ||Ax||_2 / ||x||_2$. В силу компактности единичной сферы в $\mathbb{C}^n$, непрерывности нормы и теоремы Вейерштрасса, найдется вектор x_1 такой, что $||Ax_1||_2 = ||A||_2$ и $||x_1||_2 = 1$. Пусть $y_1 = Ax_1 / ||Ax_1||_2$. Таким образом,

$$Ax_1 = \sigma_1 y_1, \quad ||x_1||_2 = ||y_1||_2. \qquad (\#)$$

Дополним x_1 и y_1 до ортонормированных базисов и образуем унитарные матрицы

$$U_1 = [x_1, x_2, \ldots, x_n], \quad V_1 = [y_1, y_2, \ldots, y_m].$$

Согласно $(\#)$, матрица $A_1 \equiv V_1^* A U_1$ имеет в первом столбце только один ненулевой элемент, равный σ_1:

$$A_1 = V_1^* A U_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & z^* \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

В силу унитарной инвариантности спектральной нормы, $||A_1|| = \sigma_1$. Поэтому

$$\sigma_1 \left\| \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ z \end{bmatrix} \right\|_2 \ge \left\| A_1 \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ z \end{bmatrix} \right\|_2 \ge \sigma_1^2 + ||z||_2^2 \ \Rightarrow \ \sigma_1^2 \ge \sigma_1^2 + ||z||_2^2 \ \Rightarrow \ z = 0 \ \Rightarrow \ A_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

Далее будем рассуждать по индукции. Если для A_2 уже имеется сингулярное разложение $A_2 = V_2^* \Sigma_2 U_2$, то сингулярное разложение для A находится с легкостью. Для этого достаточно взять

$$U \ = \ U_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix}, \qquad V \ = \ V_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix},$$

заметить, что матрицы U и V унитарные (как произведение унитарных матриц), и убедиться в том, что выполняется равенство

$$V^*AU = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix}.$$

Остается заметить, что индукция начинается с построения сингулярного разложения для матриц, представляющих собой один столбец либо одну строку.

Пусть $A = [a] \in \mathbb{C}^{m \times 1}$ — матрица-столбец. В этом случае найдем в $\mathbb{C}^m$ ортонормированный базис $v_1, \ldots, v_m$, начинающийся с $v_1 = a/||a||_2$. Тогда

$$A = V\Sigma U^*, \qquad V = [v_1, \ldots, v_m], \quad \Sigma = [||a||_2, 0, \ldots, 0]^\top, \quad U = [1] \in \mathbb{C}^{1\times 1}.$$

Для матрицы-строки сингулярное разложение получается транспонированием. □

Следствие 1. *Спектральная норма матрицы равна ее старшему сингулярному числу.*

Следствие 2. *Пусть матрица A обратима и σ_n — ее младшее сингулярное число. Тогда $||A^{-1}||_2 = 1/\sigma_n$.*

Теперь ясно, что старшее сингулярное число матрицы и младшее сингулярное число обратимой матрицы определены однозначно. То же верно для всего набора сингулярных чисел, но это мы докажем позже. Сингулярное разложение вместе еще с рядом важных следствий заслуживает более обстоятельного обсуждения, которое мы временно отложим — с тем, чтобы вернуться к нему на более подготовленной почве.

Задача. Доказать неравенство $||A||_F \le \sqrt{\mathrm{rank} A}\, ||A||_2$.

Задача. Пусть $A = [a_{ij}]$ и $D = [d_{ij}]$ — комплексные матрицы порядка n, при этом D — диагональная матрица с элементами $d_{ii} = a_{ii}$ при $1 \le i \le n$. Докажите, что если $||A||_2 = ||D||_2$, то нулевых элементов в матрице A не меньше, чем $2n - 2$.

Матрицу P можно выбрать в виде $P = P_{n-2} \ldots P_1$, где $P_k = Z_k \Pi_k$ — произведение матрицы перестановки Π_k и матрицы модификации строк Z_k.

Доказательство. Если $a_{21} \ne 0$, то $\Pi_1 = I$. Если $a_{21} = 0$, но $a_{i1} \ne 0$ при $i \ge 3$, то 2-ю и i-ю строки следует переставить — с помощью умножения на соответствующую матрицу перестановки Π_1. В случае $a_{21} \ne 0$ с помощью матрицы модификации строк Z_1 исключаем все элементы первого столбца в позициях $(i, 1)$ при $3 \le i \le n$. Проиллюстрируем первый шаг для $n = 4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a_{31}}{a_{21}} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-a_{41}}{a_{21}} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_{31}}{a_{21}} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{a_{41}}{a_{21}} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ 0 & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ 0 & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}.$$

Важно, что при умножении справа на P_1^{-1} элементы первого столбца не изменяются $\Rightarrow$ нули, полученные там ранее, сохранятся.

Второй шаг направлен на получение нулей во втором столбце. Если $c_{32} \ne 0$, то исключение проводится таким образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-c_{42}}{c_{32}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ 0 & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ 0 & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ 0 & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ 0 & 0 & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ 0 & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ 0 & 0 & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_{42}}{c_{32}} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ 0 & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ 0 & 0 & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix}.$$

В случае $n \ge 5$ точно так же на третьем шаге получаем нули в позициях третьего столбца $(i, 3)$ при $i \ge 5$. И так далее. □

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЧАСТЬ

29.8 Матрицы Фробениуса

Задача о вычислении собственных значений матрицы сводится к вычислению корней некоторого многочлена (характеристического многочлена данной матрицы). Верно ли обратное? Можно ли задачу о вычислении корней многочлена степени n свести к вычислению собственных значений некоторой матрицы? Ответ положительный. Пусть многочлен имеет вид

$$f(\lambda) \;=\; \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Тогда интересующая нас матрица может быть, в частности, такой:

$$A_f \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Матрица A_f называется *матрицей Фробениуса* или *сопровождающей матрицей* многочлена $f(x)$.

Утверждение. *Характеристический многочлен матрицы Фробениуса A_f для многочлена $f(\lambda)$ имеет вид* $\det(A_f - \lambda I) = (-1)^n f(\lambda)$.

Доказательство. При вычислении определителя $\det(A_f - \lambda I)$ прибавим к первой строке 2-ю строку, умноженную на λ, затем 3-ю строку, умноженную на λ^2, и так далее. Вот что получается при $n = 4$:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 - \lambda \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & -\lambda^2 & 0 & -a_0 - a_1\lambda \\ 1 & -\lambda & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\lambda^3 & -a_0 - a_1\lambda - a_2\lambda^2 \\ 1 & -\lambda & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 - \lambda \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0 - a_1\lambda - a_2\lambda^2 - a_3\lambda^3 - \lambda^4 \\ 1 & -\lambda & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$= a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \lambda^4. \qquad \square$$

29.9 Вычисление характеристического многочлена

Как мы знаем, с помощью элементарных преобразований любую квадратную матрицу можно привести к подобной ей верхней почти треугольной матрице H. Поэтому достаточно научиться вычислять характеристический многочлен для H.

Для этого вложим верхнюю почти треугольную матрицу $H - \lambda I$ в верхнюю треугольную матрицу и рассмотрим следующую систему линейных алгебраических уравнений (пусть для простоты $n = 4$):

$$\begin{bmatrix} 1 & h_{11} - \lambda & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ 0 & h_{21} & h_{22} - \lambda & h_{23} & h_{24} \\ 0 & 0 & h_{32} & h_{33} - \lambda & h_{34} \\ 0 & 0 & 0 & h_{43} & h_{44} - \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(\lambda) \\ f_2(\lambda) \\ f_3(\lambda) \\ f_4(\lambda) \\ f_5(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Предположим, что поддиагональные элементы матрицы H отличны от нуля. Тогда матрица коэффициентов данной системы обратима $\Rightarrow$ система имеет единственное решение, в котором, очевидно, $f_k(\lambda)$ будет многочленом степени $n+1-k$ от λ. Согласно правилу Крамера,

$$f_1(\lambda) \;=\; \frac{(-1)^{n+1}\det(H - \lambda I)}{h_{21} \ldots h_{n+1\,n}}.$$

В данном методе для вычисления всех коэффициентов характеристического многочлена матрицы порядка n выполняется $O(n^3)$ арифметических операций (проверьте!).

Лекция 30

30.1 Одномерные инвариантные подпространства

Пусть L инвариантно относительно $\mathcal{A}$ и $\dim L = 1$. Пусть $x \in L$ и $x \ne 0$. Инвариантность означает, что $\mathcal{A}x = \lambda x$ для некоторого числа λ. В таких случаях λ и $x \ne 0$ называются *собственным значением* и *собственным вектором* оператора $\mathcal{A}$.

Если x — собственный вектор для $\mathcal{A}$, то линейная оболочка $L(x)$ будет инвариантным подпространством размерности 1: $z \in L(x) \;\Rightarrow\; z = \alpha x \;\Rightarrow\; \mathcal{A}z = (\alpha\lambda)x \in L(x)$.

В дальнейшем будем считать, что оператор $\mathcal{A}$ действует на комплексном пространстве размерности n и задан своей матрицей $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ в произвольном фиксированном базисе. Таким образом, можно говорить о подпространствах в $\mathbb{C}^n$, инвариантных относительно умножения на матрицу A (или, короче, относительно матрицы A). Сохраним обозначения L и x для подпространства и столбца из $\mathbb{C}^n$, имеющих смысл упомянутых выше L и x. Мы уже знаем, что собственные значения λ матрицы A и только они суть корни характеристического уравнения $\det(A - \lambda I) \;=\; 0$. Из основной теоремы алгебры вытекает, что матрица A (оператор $\mathcal{A}$) имеет комплексное собственное значение. Отсюда получаем нужное нам

Утверждение. *Любая матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ имеет инвариантное подпространство размерности 1.*

Задача. Матрица A порядка n имеет ненулевые попарно различные собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $X \mapsto AXA^{-1}$, $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Задача. Матрица A порядка n имеет попарно различные собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $X \mapsto AX^\top A$, $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Задача. Матрица $A = A^*$ порядка n и ее окаймление $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix}$ с помощью $n \times r$-матрицы B являются обратимыми матрицами. Докажите, что матрица

$$Z = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B^*A^{-1}B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix}$$

имеет собственные значения 1 и $(1 \pm \sqrt{5})/2$ алгебраической кратности, соответственно, $n - r$ и r.

30.2 Геометрическая кратность собственного значения

Фиксируем собственное значение λ оператора $\mathcal{A}$ и рассмотрим множество L всех векторов x таких, что $\mathcal{A}x = \lambda x$.

Утверждение. *Множество L является подпространством, инвариантным относи-*

тельно $\mathcal{A}$.

Доказательство. Пусть $x, y \in L \ \Rightarrow\ \mathcal{A}x = \lambda x,\ \mathcal{A}y = \lambda y \ \Rightarrow\ \mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \lambda(\alpha x + \beta y)$ $\Rightarrow\ \alpha x + \beta y \in L$. Инвариантность L очевидна: если $x \in L$, то $\mathcal{A}x = \lambda x \in L$. $\square$

Определение. Подпространство L называется *собственным подпространством*, а его размерность — *геометрической кратностью* собственного значения Λ.

30.3 Матричное выражение инвариантности

Теорема. *Пусть* $L \subset \mathbb{C}^n$ *инвариантно относительно* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *и* $\dim L = k$. *Тогда существуют матрицы* $X \in \mathbb{C}^{n\times k}$ *и* $B \in \mathbb{C}^{k\times k}$ *такие, что столбцы* X *образуют в* L *базис и выполняется равенство* $AX = XB$. *Характеристический многочлен матрицы* B *является делителем характеристического многочлена матрицы* A.

Доказательство. Образуем X из базисных векторов $x_1, \ldots, x_k$ для L. Инвариантность означает, что Ax_j есть линейная комбинация векторов $x_1, \ldots, x_k$. Определим матрицу B таким образом, что ее j-й столбец b_j содержит коэффициенты данной линейной комбинации. Тогда $Ax_j = Xb_j \ \Rightarrow\ AX = XB$.

Дополним X какими-то столбцами до невырожденной матрицы $\widetilde{X} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Тогда

$$A\widetilde{X} \ = \ \widetilde{X} \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

для каких-то блоков C и D. Отсюда

$$\det(A - \lambda I) \ = \ \det(\widetilde{X}^{-1} A \widetilde{X} - \lambda I) \ = \ \det(B - \lambda I_k)\,\det(D - \lambda I_{n-k}). \qquad \square$$

Следствие. *Геометрическая кратность собственного значения не выше его алгебраической кратности.*

30.4 Сужение оператора на подпространство

Если подпространство L инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$, то можно определить линейный оператор $\mathcal{B} : L \to L$ правилом

$$\mathcal{B}x \ = \ \mathcal{A}x, \quad x \in L.$$

Оператор $\mathcal{A}$ имеет более широкую область определения, чем $\mathcal{B}$. Но $\mathcal{B}$ действует на векторы из L так же, как $\mathcal{A}$ — поэтому его называют *сужением оператора* $\mathcal{A}$ *на* L. Говорят также, что $\mathcal{A}$ *индуцирует* на L оператор $\mathcal{B}$ и называют $\mathcal{B}$ *индуцированным оператором*.

Если A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в каком-то базисе, $x_1, \ldots, x_k$ — базис в L и $X = [x_1, \ldots, x_k]$, то равенство $AX = XB$ означает, что матрица B является матрицей сужения оператора $\mathcal{A}$ на L в базисе $x_1, \ldots, x_k$.

30.5 Инвариантные пространства и сдвиги

Утверждение. *Матрицы* A *и* $A - \lambda I$ *имеют общие инвариантные пространства для любого* λ.

Доказательство. Пусть L инвариантно относительно A. Если $x \in L$, то $Ax \in L \ \Rightarrow$ $Ax - \lambda x \in L \ \Rightarrow\ L$ инвариантно относительно $A - \lambda I$. Заметим также, что $A = B - \lambda' I$, где $B = A - \lambda I,\ \lambda' = -\lambda$. $\square$

30.6 Треугольная форма матрицы

Лемма 1. *Для любой матрицы* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *существует инвариантное пространство размерности* $n-1$.

Доказательство. Мы уже знаем, что образ $\mathrm{im}A$ является инвариантным пространством. Если его размерность равна $n-1$, то все доказано.

Если она равна $k < n-1$, то $\mathrm{im}A$ заведомо принадлежит какому-то более широкому подпространству L размерности $n-1$, притом если $x \in L$, то $Ax \in \mathrm{im}A \subset L$. Значит, L инвариантно относительно A. Если $\dim \mathrm{im}A = n$, то перейдем к матрице $B = A - \lambda I$, где λ — какое-то собственное значение матрицы A. Ясно, что $\dim\ker B \ge 1 \ \Rightarrow$ $\dim \mathrm{im}B \le n-1 \ \Rightarrow\ B$ имеет инвариантное пространство размерности $n-1$. Оно же инвариантно относительно A. $\square$

Лемма 2. *Пусть* L *инвариантно относительно* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *и* $\dim L = k > 1$. *Тогда в* L *имеется инвариантное относительно* A *подпространство размерности* $k-1$.

Доказательство. Согласно матричному выражению инвариантности, $AX = XB$, где столбцы X образуют в L базис и $B \in \mathbb{C}^{k\times k}$. По лемме 1, матрица B имеет инвариантное пространство размерности $k-1$. Обозначим его через M и рассмотрим множество N векторов вида $Xz,\ z \in M$. Конечно, $N \subset \mathbb{C}^n$ есть подпространство размерности $k-1$. При этом $A(Xz) = X(Bz) \ \Rightarrow\ N$ инвариантно относительно A. $\square$

Следствие. *Для любой матрицы* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *существует цепочка вложенных подпространств*

$$L_1 \subset \ldots \subset L_n = \mathbb{C}^n,$$

каждое из которых инвариантно относительно A *и притом* $\dim L_k = k$.

Теорема о верхней треугольной форме. *Любая матрица* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *подобна верхней треугольной матрице.*

Доказательство. Построим базис $x_1, \ldots, x_n$ таким образом, что $L_k = L(x_1, \ldots, x_k)$ (достаточно взять $x_1 \in L_1$, дополнить его до базиса в L_2 вектором x_2, и так далее). Пусть $X = [x_1, \ldots, x_n]$. Тогда Ax_j есть линейная комбинация столбцов $x_1, \ldots, x_j \ \Rightarrow$ $Ax_j = Xb_j$ для столбца b_j с нулями в позициях ниже j-й. Таким образом, матрица $B = [b_1, \ldots, b_n]$ — верхняя треугольная, и при этом $AX = XB \ \Rightarrow\ B = X^{-1}AX$. $\square$

Заметим, что если $B = X^{-1}AX$, то B и A имеют один и тот же характеристический многочлен. Поэтому B и A имеют один и тот же набор n собственных значений с учетом кратностей. Если матрица B треугольная, то ее собственные значения суть элементы главной диагонали.

Задача. Квадратные матрицы A и B порядка n имеют собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и $\mu_1, \ldots, \mu_n$ (с учетом кратностей). Найти все собственные значения (с учетом кратностей) линейного оператора $X \mapsto AX + XB,\ X \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

30.7 Спектральный радиус

Множество собственных значений матрицы часто называется также ее *спектром*. Наибольший модуль собственных значений матрицы A называется ее *спектральным радиусом*. Обозначение: $\rho(A)$.

Утверждение. *Для спектрального радиуса имеет место оценка* $\rho(A) \le ||A||$, *где* $||\cdot||$

— *произвольная матричная норма.*

Доказательство. Пусть $Ax = \lambda x,\ x \ne 0$. Тогда $||\lambda x|| = |\lambda| ||x|| \le ||A|| ||x|| \ \Rightarrow$ $|\lambda| \le ||A||$. $\square$

Задача. Докажите, что спектральный радиус получается как предел $\rho(A) = \lim\limits_{k\to\infty} ||A^k||^{1/k}$, где $||\cdot||$ — произвольная фиксированная матричная норма. (В силу теоремы о верхней треугольной форме достаточно рассмотреть случай верхней треугольной матрицы A.)

Задача. Докажите, что $\rho(A) = \inf ||X^{-1}AX||_p$, где точная нижняя грань берется по всем обратимым матрицам X, а $||\cdot||_p$ — операторная норма, порожденная p-нормой векторов.

Задача. Все элементы квадратной матрицы A неотрицательны, а суммы элементов в каждой строке одинаковы и равны λ. Доказать, что λ является наибольшим по модулю собственным значением матрицы A.

Замечание. В общем случае матрица может не иметь неотрицательных собственных значений, поэтому $\rho(A)$ не обязано быть собственным значением матрицы A. Однако, для любой *неотрицательной матрицы* — матрицы, все элементы которой неотрицательны, известно, что спектральный радиус непременно является также ее собственным значением, а в качестве отвечающего ему собственного вектора можно выбрать вектор с неотрицательными элементами (это основной результат теории неотрицательных матриц, известный как *теорема Перрона–Фробениуса*). Возможная схема доказательства в случае *положительной матрицы* — матрицы, все элементы которой положительны, например, такая: (1) минимальное значение нормы $||D^{-1}AD||_\infty$ на множестве всех диагональных матриц D с положительной диагональю *достигается* на некоторой диагональной матрице $\hat{D}$ (почему?); (2) в матрице $\hat{A} \equiv \hat{D}^{-1}A\hat{D}$ суммы модулей элементов в каждой строке одинаковы и, следовательно, равны $\rho(A)$ (если имеются строки с разными суммами, то можно найти диагональную матрицу D, для которой $||D^{-1}\hat{A}D||_\infty < ||\hat{A}||_\infty$); (3) вектор, составленный из диагональных элементов $\hat{D}$, является для A собственным вектором, отвечающим собственному значению $\rho(A)$.

30.8 Теорема Шура

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — полный набор n собственных значений матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ с учетом кратностей. Пусть фиксируется произвольная нумерация собственных значений.

Теорема Шура. *Для любой матрицы* $A \in \mathbb{C}^n$ *с произвольной предписанной нумерацией ее собственных значений* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *существует унитарная матрица* $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *такая, что* $B = [b_{ij}] = X^*AX$ *есть верхняя треугольная матрица с диагональными элементами* $b_{ii} = \lambda_i,\ \ i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Пусть $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $|x_1| = 1$ (длина определяется естественным скалярным произведением). Построим ортонормированный базис $x_1, \ldots, x_n$, начинающийся с вектора x_1, и пусть $X = [x_1, \ldots, x_n]$. Легко проверить, что

$$AX \ = \ X \begin{bmatrix} \lambda_1 & u^\top \\ 0 & B \end{bmatrix}, \quad B \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}, \quad u \in \mathbb{C}^{n-1}.$$

Заметим, что $\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\ldots(\lambda_n - \lambda) = (\lambda_1 - \lambda)\,\det(B - \lambda I_{n-1})$. Значит, B имеет собственные значения $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Рассуждая по индукции, предположим, что $Y^*BY = T$, где Y — унитарная матрциа порядка $n-1$, а T — верхняя треугольная матрица порядка $n-1$ с диагональными элементами $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$. В итоге

$$(\widetilde{Y}^* X^*) A (X\widetilde{Y}) \ = \ \begin{bmatrix} \lambda_1 & u^\top Y \\ 0 & T \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}.$$

Из унитарности матрицы Y следует, что $\widetilde{Y}$ — унитарная матрица. Матрица $X\widetilde{Y}$ унитарна как произведение унитарных матриц. $\square$

Сформулированная выше теорема о треугольной форме матрицы является, конечно, следствием теоремы Шура. При этом в теореме Шура утверждается больше — треугольная форма с предписанным порядком собственных значений на диагонали достигается преобразованием подобия с помощью унитарной матрицы.

Отметим конструктивный характер приведенного доказательства теоремы Шура. Как только найдены собственное значение λ_1 и отвечающий ему собственный вектор x_1, задача определения остальных собственных значений сводится к аналогичной задаче порядка $n-1$. [1] Такого рода прием понижения размерности иногда называют *дефляцией*.

Задача. Докажите, что для любой комплексной матрицы A порядка 3 существует унитарная матрица Q такая, что матрица $B = Q^*AQ$ является трехдиагональной. (Матрица B называется *трехдиагональной*, если $b_{ij} = 0$ при $|i - j| > 1$.) [2]

30.9 Делители и подпространства

Вследствие матричного выражения инвариантности, любому инвариантному подпространству матрицы A соответствует некоторый делитель ее характеристического многочлена, являющийся характеристическим многочленом сужения A на данное подпространство. Из теоремы Шура легко вывести и обратное.

Теорема о делителях и подпространствах. *Пусть* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *и* $f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ — *характеристический многочлен. Предположим, что* $f(\lambda)$ *делится на многочлен* $p(\lambda)$ *степени* k. *Тогда* A *имеет инвариантное подпространство* L *размерности* k *такое, что* $p(\lambda)$ *есть характеристический многочлен сужения* A *на* L.

Доказательство. Упорядочим корни многочлена $f(\lambda)$ таким образом, что первые k корней будут также корнями делителя $p(\lambda)$. Согласно теореме Шура, существуют X и B такие, что в верхней треугольной матрице B первые k элементов главной диагонали будут корнями $p(\lambda)$. Пусть X_k — прямоугольная матрица, содержащая первые k столбцов X, а B_k — левый верхний блок порядка k в матрице B. Тогда $AX_k = X_k B_k$ и при этом $\det(B_k - \lambda I) = p(\lambda)$. $\square$

[1] Ниоткуда, впрочем, не следует, что собственный вектор матрицы B автоматически соответствует какому-то собственному вектору матрицы A.

[2] Недавно было доказано, что то же верно для любой комплексной матрицы порядка 4 (V. Pati, 2001) и что существуют матрицы порядка 5, которые не приводятся к трехдиагональному виду преобразованием подобия с помощью унитарной матрицы.

Лекция 31

31.1 Многочлены от матрицы

Если $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_m\lambda^m$ — многочлен от λ, то для любой квадратной матрицы A имеет смысл выражение

$$f(A) \ \equiv \ a_0 I + a_1 A + \ldots + a_m A^m.$$

Оно называется *многочленом от матрицы* A. [1] Ясно, что $f(A)$ — квадратная матрица того же порядка, что и A.

Если $f(A) = 0$, то говорят, что многочлен $f(\lambda)$ является *аннулирующим многочленом* для A. Пусть A — матрица порядка n. Тогда система матриц $I, A, A^2, \ldots, A^{n^2}$ будет линейно зависимой (почему?) $\Rightarrow$ для любой матрицы порядка n имеется аннулирующий многочлен степени не выше n^2.

В действительности всегда имеется аннулирующий многочлен степени n (мы скоро докажем, что характеристический многочлен для A является аннулирующим). Иногда можно найти аннулирующие многочлены еще меньшей степени. Аннулирующий многочлен минимальной степени называется *минимальным многочленом* для A.

При поиске инвариантных подпространств многочлены от матрицы A интересны тем, что $\mathrm{ker} f(A)$ и $\mathrm{im} f(A)$ всегда инвариантны относительно A (докажите!).

31.2 Корневые пространства

Предположим, что матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ имеет m попарно различных собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ алгебраической кратности $k_1, \ldots, k_m$, соответственно. Это означает, что

$$f(\lambda) \equiv \det(A - \lambda I) \ = \ f_1(\lambda) \ldots f_m(\lambda), \quad f_i(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{k_i}, \ 1 \le i \le m; \quad \lambda_i \ne \lambda_j, \ i \ne j.$$

Подпространства $\mathcal{K}_i \equiv \mathrm{ker} f_i(A) = \mathrm{ker}(A - \lambda_i I)^{k_i}$ называются *корневыми пространствами* матрицы A.

Лемма 1. *Корневое пространство $\mathcal{K}_i$ инвариантно относительно A и имеет размерность k_i. Характеристический многочлен сужения A на $\mathcal{K}_i$ есть $f_i(\lambda) = (\lambda_i - \lambda)^{k_i}$. Сужение $A - \alpha I$ на $\mathcal{K}_i$ при $\alpha \ne \lambda_i$ является обратимым оператором.*

Доказательство. Инвариантность: если $f_i(A)x = 0$, то $f_i(A)(Ax) = A(f_i(A)x) = 0$.

По теореме о верхней треугольной форме, существует подобная A верхняя трегольная матрица $B = X^{-1}AX$ с элементами

$$b_{jj} = \lambda_i, \quad 1 \le j \le k_i, \qquad b_{jj} \ne \lambda_i, \quad k_i + 1 \le j \le n. \tag{$*$}$$

[1] Многочлен от матрицы A имеет скалярные коэффициенты. Термин *матричный многочлен* обычно используется для обозначения многочлена от λ, коэффициенты которого являются матрицами.

Очевидно, $C \equiv B - \lambda_i I = X^{-1}(A - \lambda_i I)X \quad \Rightarrow \quad C^{k_i} = (B - \lambda_i I)^{k_i} = X^{-1}(A - \lambda_i I)^{k_i} X$. Запишем C в блочном виде

$$C = \begin{bmatrix} P & Q \\ 0 & R \end{bmatrix},$$

где P и R — верхние треугольные матрицы порядка k_i и $n - k_i$. При этом P имеет нулевую главную диагональ $\quad \Rightarrow \quad P^{k_i} = 0$ (проверяется непосредственно: в матрице P^2 к нулевой главной диагонали добавляется еще одна диагональ, в P^3 — еще одна, и так далее).

Следовательно,

$$C^{k_i} = \begin{bmatrix} P^{k_i} & \widetilde{Q} \\ 0 & R^{k_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{Q} \\ 0 & R^{k_i} \end{bmatrix},$$

где все диагональные элементы верхнего треугольного блока R^{k_i} порядка $n - k_i$ отличны от нуля. Блок $\widetilde{Q}$ — какой-то блок размеров $k_i \times (n - k_i)$. Независимо от его вида, находим

$$\mathrm{rank}\, C^{k_i} = n - k_i \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rank}(A - \lambda_i I)^{k_i} = n - k_i \quad \Rightarrow \quad \dim \ker(A - \lambda_i I)^{k_i} = k_i.$$

Матрица сужения A на $\mathcal{K}_i$ представляет собой левый верхний блок порядка k_i в матрице $B = X^{-1}AX$. Согласно $(*)$, все элементы его главной диагонали равны λ_i. Чтобы получить матрицу сужения $A - \alpha I$ на $\mathcal{K}_i$, нужно заменить диагональные элементы на $\lambda_i - \alpha$. При $\alpha \ne \lambda_i$ это будет невырожденная матрица. $\square$

Лемма 2. *Если L инвариантно относительно A и сужение A на L имеет своим характеристическим многочленом $f_i(\lambda)$, то $L = \mathcal{K}_i$.*

Доказательство. Пусть $M \in \mathbb{C}^{k_i \times k_i}$ — матрица сужения A на L в каком-то базисе. Согласно теореме о верхней треугольной форме, этот базис можно выбрать так, чтобы M была верхней треугольной. Тогда $M - \lambda_i I$ — верхняя треугольная матрица с нулевой главной диагональю $\quad \Rightarrow \quad (M - \lambda_i I)^{k_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda_i I)^{k_i} x = 0 \ \ \forall \ x \in L \quad \Rightarrow \quad L \subset \mathcal{K}_i$. Поскольку $\dim L = \dim \mathcal{K}_i$, получаем $L = \mathcal{K}_i$. $\square$

31.3 Нильпотентные операторы

Оператор $\mathcal{A} : V \to V$ называется *нильпотентным*, если $\mathcal{A}^k = 0$ для какого-то k. Так же называется матрица A такая, что $A^k = 0$.

Утверждение. *Матрица A порядка n нильпотентна тогда и только тогда, когда ее характеристический многочлен имеет вид* $\det(A - \lambda I) = (-\lambda)^n$.

Доказательство. Пусть $A^k = 0$, $Ax = \lambda x$, $x \ne 0 \quad \Rightarrow \quad A^k x = \lambda^k x = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0$. Если A имеет собственное значение нуль кратности n, то, по теореме о верхней треугольной форме, она подобна верхней треугольной матрице B с нулями на главной диагонали $\Rightarrow \quad B^n = 0$. $\square$

Следствие. *Сужение $A - \lambda_i I$ на корневое пространство $\mathcal{K}_i$ является нильпотентным оператором на $\mathcal{K}_i$.*

Задача. Доказать, что матрица A является нильпотентной тогда и только тогда, когда $\mathrm{tr}\, A^k = 0$ для всех натуральных k.

Задача. Для квадратных матриц A и B выполняется равенство $AB - BA = A^{1955}$. Доказать, что матрица A нильпотентная.

31.4 Корневое разложение

Теорема о корневом разложении. *Пусть матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ имеет m попарно различных собственных значений алгебраической кратности $k_1, \ldots, k_m$, а $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_m$ — отвечающие им корневые пространства. Тогда $\mathbb{C}^n$ разлагается в прямую сумму*

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{K}_1 + \ldots + \mathcal{K}_m. \tag{$*$}$$

Доказательство. Докажем, что сумма $\mathcal{K}_1 + \ldots + \mathcal{K}_m$ является прямой. Пусть

$$x_1 + \ldots + x_m = 0, \quad x_i \in \mathcal{K}_i, \quad 1 \le i \le m. \quad \Rightarrow$$

$$(A - \lambda_2 I)^{k_2} \ldots (A - \lambda_m I)^{k_m} (x_1 + \ldots + x_m) = (A - \lambda_2 I)^{k_2} \ldots (A - \lambda_m I)^{k_m} x_1 = 0.$$

Здесь мы используем то, что любые матричные многочлены от A коммутируют. В силу Леммы 1, сужение каждой из матриц $(A - \lambda_i I)^{k_i}$, $2 \le i \le m$, на $\mathcal{K}_1$ является обратимым оператором $\quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$. Аналогично доказывается, что $x_2 = \ldots = x_m = 0$. Остается учесть, что

$$\dim \mathcal{K}_1 + \ldots + \dim \mathcal{K}_m = n. \qquad \square$$

Разложение $(*)$ иногда называется *корневым разложением* матрицы A.

Пусть A рассматривается как матрица линейного оператора $\mathcal{A} : V_n \to V_n$ на комплексном n-мерном пространстве V_n. Собственные значения λ_i и их алгебраические кратности k_i не зависят от выбора базиса для представления оператора $\mathcal{A}$. Под корневыми пространствами оператора $\mathcal{A}$ понимаются подпространства $\ker(\mathcal{A} - \lambda_i I)^{k_i} \subset V_n$ (здесь I — тождественный оператор). Полученной нами теореме можно дать и операторную формулировку.

Операторная формулировка теоремы о корневом разложении. *Сумма m корневых пространств оператора $\mathcal{A}$ является прямой и совпадает с V_n:*

$$V_n = \ker(\mathcal{A} - \lambda_1 I)^{k_1} \ + \ \ldots \ + \ \ker(\mathcal{A} - \lambda_m I)^{k_m}$$

31.5 Блочно диагональная форма матрицы

Согласно теореме о корневом разложении, базис в $\mathbb{C}^n$ можно выбрать как объединение базисов в корневых пространствах $\mathcal{K}_i$, $1 \le i \le m$. Пусть этот базис представлен столбцами матрицы X. Тогда, вследствие теоремы о корневом разложении,

$$X^{-1}AX \ = \ \begin{bmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_m \end{bmatrix}.$$

Порядок блока B_i равен алгебраической кратности собственного значения λ_i.

Заметим, что, в силу теоремы о верхней треугольной форме, X можно выбрать таким образом, что каждый блок B_i будет верхней треугольной матрицей.

Задача. Пусть верхняя треугольная матрица порядка $n = n_1 + n_2$ имеет вид $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ и при этом блоки $A_{11} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}$ и $A_{22} \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}$ не имеют общих собственных значений. Докажите, что существует

матрица $X \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$ такая, что

$$\begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}.$$

31.6 Теорема Гамильтона–Кэли

Теорема Гамильтона–Кэли. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ — произвольная матрица и $f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ — ее характеристический многочлен. Тогда $f(A) = 0$.*

Доказательство. Пусть имеется m попарно различных собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ алгебраической кратности $k_1, \ldots, k_m$. Тогда

$$f(A) \ = \ (-1)^n (A - \lambda_1 I)^{k_1} \ldots (A - \lambda_m I)^{k_m}.$$

Любой вектор $x \in \mathbb{C}^n$ имеет вид $x = x_1 + \ldots + x_m$, где $(A - \lambda_i I)^{k_i} x_i = 0$. Остается заметить, что матрицы $(A - \lambda_i I)^{k_i}$ и $(A - \lambda_j I)^{k_j}$ коммутируют. $\square$

Замечание. При доказательстве теоремы Гамильтона–Кэли было использовано каноническое разложение комплексного многочлена (характеристического многочлена матрицы A) и связанный с ним результат о расщеплении $\mathbb{C}^n$ в прямую сумму корневых пространств матрицы A. Однако, характеристический многочлен имеет смысл для матрицы над любым полем, причем это будет многочлен с коэффициентами именно из этого поля. В общем случае, правда, он может не иметь ни одного корня в заданном поле. Тем не менее, теорема Гамильтона–Кэли остается справедливой и в общем случае.

В случае произвольного поля можно предложить, например, такое рассуждение. Обозначим через $B(\lambda)$ матрицу, элементами которой являются многочлены от λ и при этом в позиции i,j находится алгебраическое дополнение к элементу в позиции j,i матрицы $A - \lambda I$. Тогда

$$(A - \lambda I)B(\lambda) \ = \ B(\lambda)(A - \lambda I) \ = \ f(\lambda)I, \qquad f(\lambda) \ = \ \det(A - \lambda I). \tag{$*$}$$

Данные равенства представляют собой равенства некоторых *матричных многочленов* — многочленов от λ, в которых коэффициенты являются матрицами общих размеров. Степенью матричного многочлена $F(\lambda) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + A_0$, где $A_k \ne 0$, называется число k. Как и раньше, будем писать $\deg F = k$. Нетрудно доказать, что существует и единственно представление

$$F(\lambda) = (\lambda I - A)Q(\lambda) + R(\lambda),$$

где либо $R(\lambda) = 0$, либо $\deg R \le k - 1$. Ясно также, что $F(A) = R(A)$. Остается заметить, что в силу $(*)$ матричный многочлен $F(\lambda) = f(\lambda)I$ делится нацело на $\lambda I - A$, поэтому $F(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(A) = 0$.

Лекция 32

32.1 Минимальное инвариантное подпространство

Попробуем сделать более специальный выбор базиса в корневом пространстве $\mathcal{K}_i$, позволяющий расщепить $\mathcal{K}_i$ в прямую сумму инвариантных подпространств с максимально возможным числом слагаемых.

Поскольку инвариантные подпространства не меняются при сдвиге, их можно строить для $B = A - \lambda_i I$. Если A имеет попарно различные собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, то B получает попарно различные собственные значения $\mu_1 = \lambda_1 - \lambda_i, \ldots, \mu_m = \lambda_m - \lambda_i$ с теми же алгебраическими кратностями. В частности, B имеет собственное значение $\mu_i = 0$ алгебраической кратности k_i.

Предположим, что $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}_i$ инвариантно относительно B, и пусть $x \ne 0$, $x \in \mathcal{L}$. Тогда $\mathcal{L}$ содержит все векторы вида $x,\ Bx,\ B^2x,\ \ldots$. Поскольку $\mathcal{K}_i = \ker B^{k_i}$, заключаем, что

$$B^l x = 0 \ \text{ при } \ l \ge k_i.$$

Обозначим через $k = k(x)$ наименьший номер такой, что $B^k x = 0$. Будем называть k *высотой вектора* x в корневом пространстве $\mathcal{K}_i$.

Лемма о минимальном инвариантном подпространстве. *Пусть $x \in \mathcal{K}_i$ — вектор высоты k. Тогда*

$$L_k = L(x,\, Bx,\, \ldots,\, B^{k-1}x) \subset \mathcal{K}_i$$

является наименьшим инвариантным подпространством, содержащим x. При этом векторы $x,\, Bx,\, \ldots,\, B^{k-1}x$ линейно независимы.

Доказательство. Инвариантность очевидна. Пусть

$$\alpha_1 x + \alpha_2 Bx + \ldots + \alpha_k B^{k-1}x = 0. \tag{\#}$$

Умножив обе части слева на B^{k-1}, находим $B^{k-1}Bx = B^{k-1}B^2x = \ldots = B^{k-1}B^{k-1}x = 0$ $\Rightarrow$ $\alpha_1 B^{k-1}x = 0$ $\Rightarrow$ $\alpha_1 = 0$. Далее, умножив обе части (#) слева на B^{k-2}, находим $\alpha_2 = 0$, и так далее. Таким образом, $\dim L_k = k$. □

32.2 Жордановы цепочки

Занумеруем векторы $x, Bx, \ldots, B^{k-1}x$ в обратном порядке: $x_1 = B^{k-1}x$, $x_2 = B^{k-2}x$, $\ldots$, $x_{k-1} = Bx$, $x_k = x$. Тогда

$$Bx_1 = 0, \quad Bx_j = x_{j-1}, \ \ 2 \le j \le k. \tag{*}$$

Система векторов $x_1, \ldots, x_k$, обладающих свойствами (*), называется *жордановой цепочкой длины k, начинающейся с вектора x_1*. В силу определения B, равенства (*) эквивалентны равенствам

$$Ax_1 = \lambda_i x_1, \quad Ax_j = \lambda_i x_j + x_{j-1}, \ \ 2 \le j \le k. \tag{**}$$

Пусть $X = [x_1, \ldots, x_k]$ и J_k — матрица порядка k, определенная равенством (матрица сужения A на L_k в базисе $x_1, \ldots, x_k$)

$$AX = XJ_k.$$

В силу (**),

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Матрица вида J_k называется *жордановой клеткой* (жордановым блоком, жордановым ящиком), отвечающей собственному значению λ_i.

32.3 Жорданова форма матрицы

Подпространство L_k, натянутое на жорданову цепочку векторов вида (*) или (**), иногда называется *циклическим подпространством* в $\mathcal{K}_i$, отвечающим собственному значению λ_i. Наша ближайшая цель — показать, что $\mathcal{K}_i$ можно представить в виде прямой суммы циклических подпространств.

Тогда, объединив базисы циклических подпространств, получаем в $\mathcal{K}_i$ такой базис, в котором матрица сужения A на $\mathcal{K}_i$ имеет блочно диагональный вид, где каждый блок есть жорданова клетка. Сделав то же для каждого корневого пространства, в результате объединения базисов всех циклических подпространств получаем так называемый *жорданов базис*: в нем матрица A получает свою *жорданову форму* — становится блочно диагональной матрицей, в которой каждый блок главной диагонали является жордановой клеткой для какого-то ее собственного значения.

Матрица J блочно диагонального вида с блоками $J_1, \ldots, J_N$ называется *прямой суммой* своих блоков $J_1, \ldots, J_N$. Обозначение:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_N \end{bmatrix} = J_1 \oplus \ldots \oplus J_N.$$

В этой терминологии жорданова форма представляет собой прямую сумму жордановых клеток.

32.4 Индекс собственного значения

Очевидно, $\ker B \subset \ker B^2 \subset \ \ldots$ и $\operatorname{im} B \supset \operatorname{im} B^2 \supset \ldots$. В конечномерном пространстве подпространства не могут расширяться неограниченно, поэтому для некоторой степе-

ни $\ker B^k = \ker B^{k+1}$. Минимальный номер k с таким свойством называется *индексом собственного значения* λ_i (напомним, что $B = A - \lambda_i I$).

Утверждение. *Если $\ker B^k = \ker B^{k+1}$, то $\ker B^l = \ker B^{l+1}$ при всех $l \ge k$.*

Доказательство. Пусть $x \in \ker B^{l+1}$ $\Rightarrow$ $B^{k+1}(B^{l-k}x) = 0$ $\Rightarrow$ $B^k(B^{l-k}x) = 0$ $\Rightarrow$ $x \in \ker B^l$. □

Следствие. *Индекс не больше алгебраической кратности данного собственного значения.*

Достаточно учесть, что $k \le \dim \ker B^k$ и $\ker B^k = \ker B^{k+1} = \ldots = \ker B^{k_i}$.

Задача. Пусть $B = A - \lambda I$, где λ — собственное значение матрицы A. Докажите, что $\ker B^l = \ker B^{l+1}$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{im} B^l = \operatorname{im} B^{l+1}$. Докажите также, что если k — индекс λ, то $\ker B^k \cap \operatorname{im} B^k = \{0\}$.

Задача. Докажите, что если $\ker A \cap \operatorname{im} A = \{0\}$, то $\ker A = \ker A^2$.

Задача. Докажите, что для диагонализуемости матрицы A необходимо и достаточно, чтобы для любого числа λ ядро и образ матрицы $A - \lambda I$ имели в пересечении лишь нулевой вектор.

32.5 Жорданов базис в корневом пространстве

Пусть k — индекс λ_i. Тогда $s \equiv \dim \ker B^k - \dim \ker B^{k-1} > 0$. Поэтому существуют s линейно независимых векторов $x_1, \ldots, x_s$, дополняющих какой-нибудь базис в $\ker B^{k-1}$ до базиса в $\ker B^k$:

$$\ker B^k = \ker B^{k-1} + L(x_1, \ldots, x_s).$$

(1) Векторы $x_1, \ldots, x_s$ имеют высоту k и порождают циклические подпространства

$$L_{1i} = L(x_i,\, Bx_i,\, \ldots,\, B^{k-1}x_i), \quad 1 \le i \le s.$$

(2) Сумма $L_{11} + \ldots + L_{1s}$ является прямой, поскольку векторы

$$x_1, Bx_1, \ldots, B^{k-1}x_1, \quad \ldots\ , \quad x_s, Bx_s, \ldots, B^{k-1}x_s$$

линейно независимы. В самом деле, пусть

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} B^{j-1} x_i = 0.$$

Умножив обе части слева на B^{k-1}, находим

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_{i1} B^{k-1} x_i = 0 \ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^{s} \alpha_{i1} x_i \in \ker B^{k-1} \ \Rightarrow\ \alpha_{i1} = 0, \ \ 1 \le i \le s.$$

Умножив затем обе части слева на B^{k-2}, по той же причине получим $\alpha_{i2} = 0$, $1 \le i \le s$, и так далее.

(3) Сумма $\ker B^{k-2} + L(Bx_1, \ldots, Bx_s)$ является прямой.

(4) Если она не совпадает с $\ker B^{k-1}$, то найдутся t линейно независимых векторов $y_1, \ldots, y_t$ таких, что

$$\ker B^{k-1} = \ker B^{k-2} + L(Bx_1, \ldots, Bx_s,\ y_1, \ldots, y_t),$$

причем сумма является прямой.

(5) Векторы $y_1, \ldots, y_t$ имеют высоту $k-1$ и порождают циклические подпространства

$$L_{2i} = L(y_i,\, By_i,\, \ldots,\, B^{k-2}y_i), \quad 1 \le i \le t.$$

(6) Сумма $L_{11} + \ldots + L_{1s} \ + \ L_{21} + \ldots + L_{2t}$ является прямой. Доказательство аналогично доказательству предложения **(2)**.

(7) Сумма $\ker B^{k-3} + L(B^2x_1, \ldots, B^2x_s,\ By_1, \ldots, By_t)$ является прямой.

(8) Если она не совпадает с $\ker B^{k-2}$, действуем по аналогии с шагом **(4)**.

И так далее.

Для наглядности построенные векторы расположим в виде следующей таблицы:

$$\begin{array}{cccccccccc}
x_1 & \ldots & x_s & & & & & & & \\
Bx_1 & \ldots & Bx_s & y_1 & \ldots & y_t & & & & \\
B^2x_1 & \ldots & B^2x_s & By_1 & \ldots & By_t & & & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & & \\
B^{k-1}x_1 & \ldots & B^{k-1}x_s & B^{k-2}y_1 & \ldots & B^{k-2}y_t & \ldots & z_1 & \ldots & z_r
\end{array}$$

Векторы последней строки образуют базис в ядре $\ker B$. Это собственные векторы, отвечающие собственному значению λ_i. Подпространство $\ker B = \ker(A - \lambda_i I)$ называется *собственным подпространством* для λ_i, а его размерность — *геометрической кратностью* собственного значения λ_i. По построению, общее число векторов таблицы равно алгебраической кратности λ_i.

Утверждение. *Все векторы указанной таблицы линейно независимы и образуют базис в $\mathcal{K}_i$.*

Доказательство. Рассмотрим равную нулю линейную комбинацию всех векторов таблицы. Умножив ее слева на B^{k-1}, заметим, что все векторы, кроме первой строки, обращаются в нуль. Остается лишь линейная комбинация векторов верхней строки, которую матрица B^{k-1} переводит в нуль. Вывод: линейная комбинация векторов верхней строки принадлежит $\ker B^{k-1}$. Значит, коэффициенты при векторах верхней строки равны нулю. С помощью умножения на B^{k-2} находим, что линейная комбинация векторов второй сверху строки принадлежит $\ker B^{k-2}$. Поэтому соответствующие коэффициенты равны нулю. И так далее. □

Векторы каждого столбца данной таблицы образуют базис циклического подпространства. Соответствующие жордановы цепочки получаются при нумерации их в каждом столбце снизу вверх.

32.6 Существование и единственность жордановой формы

Теорема. *Любая матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ подобна прямой сумме жордановых клеток*

$$J = J_1 \oplus \ldots \oplus J_N,$$

где число и размеры жордановых клеток для каждого собственного значения определяются однозначно по матрице A.

Доказательство. Мы только что установили, что корневое пространство $\mathcal{K}_i$ есть прямая сумма циклических подпространств. Каждый столбец полученной выше таблицы отвечает одной жордановой клетке. Из этой же таблицы можно найти число жордановых клеток заданного порядка.

причем сумма является прямой.

(5) Векторы $y_1, \dots, y_t$ имеют высоту $k-1$ и порождают циклические подпространства

$$L_{2i} = L(y_i,\, By_i,\, \dots,\, B^{k-2}y_i), \quad 1 \le i \le t.$$

(6) Сумма $L_{11} + \dots + L_{1s} \; + \; L_{21} + \dots + L_{2t}$ является прямой. Доказательство аналогично доказательству предложения **(2)**.

(7) Сумма $\ker B^{k-3} + L(B^2x_1, \dots, B^2x_s,\ By_1, \dots, By_t)$ является прямой.

(8) Если она не совпадает с $\ker B^{k-2}$, действуем по аналогии с шагом **(4)**.
И так далее.

Для наглядности построенные векторы расположим в виде следующей таблицы:

$$\begin{array}{cccccccccc}
x_1 & \dots & x_s & & & & & & & \\
Bx_1 & \dots & Bx_s & y_1 & \dots & y_t & & & & \\
B^2x_1 & \dots & B^2x_s & By_1 & \dots & By_t & & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & \\
B^{k-1}x_1 & \dots & B^{k-1}x_s & B^{k-2}y_1 & \dots & B^{k-2}y_t & \dots & z_1 & \dots & z_r
\end{array}$$

Векторы последней строки образуют базис в ядре $\ker B$. Это собственные векторы, отвечающие собственному значению λ_i. Подпространство $\ker B = \ker(A - \lambda_i I)$ называется *собственным подпространством* для λ_i, а его размерность — *геометрической кратностью* собственного значения λ_i. По построению, общее число векторов таблицы равно алгебраической кратности λ_i.

Утверждение. *Все векторы указанной таблицы линейно независимы и образуют базис в $\mathcal{K}_i$.*

Доказательство. Рассмотрим равную нулю линейную комбинацию всех векторов таблицы. Умножив ее слева на B^{k-1}, заметим, что все векторы, кроме первой строки, обращаются в нуль. Остается лишь линейная комбинация векторов верхней строки, которую матрица B^{k-1} переводит в нуль. Вывод: линейная комбинация векторов верхней строки принадлежит $\ker B^{k-1}$. Значит, коэффициенты при векторах верхней строки равны нулю. С помощью умножения на B^{k-2} находим, что линейная комбинация векторов второй сверху строки принадлежит $\ker B^{k-2}$. Поэтому соответствующие коэффициенты равны нулю. И так далее. $\Box$

Векторы каждого столбца данной таблицы образуют базис циклического подпространства. Соответствующие жордановы цепочки получаются при нумерации их в каждом столбце снизу вверх.

32.6 Существование и единственность жордановой формы

Теорема. *Любая матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ подобна прямой сумме жордановых клеток*

$$J = J_1 \oplus \dots \oplus J_N,$$

где число и размеры жордановых клеток для каждого собственного значения определяются однозначно по матрице A.

Доказательство. Мы только что установили, что корневое пространство $\mathcal{K}_i$ есть прямая сумма циклических подпространств. Каждый столбец полученной выше таблицы отвечает одной жордановой клетке. Из этой же таблицы можно найти число жордановых клеток заданного порядка.

Обозначим через m_j число жордановых клеток для λ_i порядка j. Заметим, в частности, что $m_k = s$, $m_{k-1} = t$ и $m_1 = r$. Размерность ядра матрицы часто называется ее *дефектом* и обозначается $\operatorname{def} \equiv \dim\ker$. В общем случае

$$\begin{array}{ccc}
m_k & = & \operatorname{def} B^k - \operatorname{def} B^{k-1}, \\
m_{k-1} + m_k & = & \operatorname{def} B^{k-1} - \operatorname{def} B^{k-2}, \\
 & \dots & \\
m_1 + \dots + m_{k-1} + m_k & = & \operatorname{def} B.
\end{array}$$

Отсюда находим (с учетом того, что $\operatorname{def} B^0 = 0$)

$$m_j = 2\operatorname{def} B^j - \operatorname{def} B^{j-1} - \operatorname{def} B^{j+1}, \quad 1 \le j \le k.$$

Следовательно, число и порядки жордановых клеток для λ_i определяются размерностями ядер $\ker(A - \lambda_i I)^j$, а значит, и рангами матриц $(A - \lambda_i I)^j$. То же верно для жордановых клеток каждого корневого пространства. $\Box$

Следствие. *Матрицы подобны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую жорданову форму с точностью до перестановки жордановых клеток.*

Задача. Всегда ли можно построить жорданов базис, содержащий произвольно выбранные базисы в собственных подпространствах?

Задача. Пусть J — жорданова клетка порядка n с нулевым собственным значением. Докажите, что уравнение $X^2 = J$ относительно $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ не имеет решений, если $n \ge 2$.

32.7 Инвариантные подпространства для вещественных матриц

Если матрица A порядка n вещественная, то можно потребовать, чтобы ее инвариантные подпространства выбирались только в $\mathbb{R}^n$. При данном ограничении может не найтись ни одного инвариантного подпространства размерности 1 (приведите пример!). Тем не менее, справедливо

Утверждение. *Матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ при $n \ge 2$ имеет инвариантное подпространство $L \subset \mathbb{R}^n$ размерности 2.*

Доказательство. Пусть $\lambda = a + \mathbf{i}b$ — собственное значение с мнимой частью $b \ne 0$. Представим собственный вектор для λ в виде $x + \mathbf{i}y$, где $x,\ y \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$A(x + \mathbf{i}y) = (a + \mathbf{i}b)(x + \mathbf{i}y) \quad \Rightarrow \quad Ax = ax - by, \;\; Ay = bx + ay.$$

Отсюда получаем также, что $A(x - \mathbf{i}y) = (a - \mathbf{i}b)(x - \mathbf{i}y)$. Векторы $x + \mathbf{i}y$ и $x - \mathbf{i}y$ линейно независимы, так как отвечают разным собственным значениям матрицы A. Пусть $\alpha x + \beta y = 0 \;\Rightarrow\; (\alpha - \mathbf{i}\beta)(x + \mathbf{i}y) + (\alpha + \mathbf{i}\beta)(x - \mathbf{i}y) = 2(\alpha x + \beta y) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha - \mathbf{i}\beta = \alpha + \mathbf{i}\beta = 0$ $\Rightarrow\; \alpha = \beta = 0$. Следовательно, линейная оболочка $L(x, y)$ является двумерным инвариантным подпространством относительно A. Если комплексных собственных значений нет, то базис, очевидно, можно составить из вещественных векторов. $\Box$

32.8 Вещественный аналог жордановой формы

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ имеет жорданову клетку J порядка k для комплексного собственного значения $\lambda = a + \mathbf{i}b$ с мнимой частью $b \ne 0$. Это означает существование жордановой цепочки

$$Av_1 = \lambda v_1, \quad Av_j = \lambda v_j + v_{j-1}, \quad 2 \le j \le k.$$

Представим каждый вектор v_j в виде $v_j = x_j + \mathbf{i}y_j$, где $x_j,\ y_j \in \mathbb{R}^n$. Тогда находим

$$A[x_1, y_1,\ x_2, y_2,\ \dots,\ x_k, y_k] = [x_1, y_1,\ x_2, y_2,\ \dots,\ x_k, y_k]M_{2k},$$

где

$$M_{2k} = \begin{bmatrix}
a & b & 1 & 0 & & & & & & \\
-b & a & 0 & 1 & & & & & & \\
 & & a & b & 1 & 0 & & & & \\
 & & -b & a & 0 & 1 & & & & \\
 & & & & \ddots & \ddots & & & & \\
 & & & & & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & & & & a & b & 1 & 0 \\
 & & & & & & -b & a & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & a & b \\
 & & & & & & & & -b & a
\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(2k)\times(2k)}. \qquad (*)$$

Заметим, что линейная оболочка $L(x_1, y_1,\ \dots,\ x_k, y_k) \subset \mathbb{R}^n$ является инвариантным подпространством размерности $2k$, совпадающим с прямой суммой двух подпространств — корневого пространства матрицы A для собственного значения $\lambda = a + \mathbf{i}b$ и корневого пространства для сопряженного собственного значения $\overline{\lambda} = a - \mathbf{i}b$ (в силу вещественности коэффициентов характеристического многочлена, λ и $\overline{\lambda}$ оба являются собственными значениями матрицы A одинаковой кратности). Из сказанного вытекает

Теорема. *Любая матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ с помощью вещественного преобразования подобия приводится к прямой сумме вещественных жордановых блоков и вещественных блоков вида $(*)$.*

32.9 Вычисление жордановой формы

ПРИМЕР 1. Выяснить диагонализуемость матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

В силу блочно диагонального вида заданной матрицы, ее собственные значения можно искать по отдельности для блоков $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ и $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Матрица A имеет собственные значения $\lambda = 2$ кратности 1 и $\lambda = 0$ кратности 3.

Собственный вектор для $\lambda = 2$ есть нетривиальное решение системы $(A - 2 \cdot I)x = 0$. Ранг матрицы коэффициентов равен 3, поэтому фундаментальная система решений состоит из одного вектора. Собственные векторы для $\lambda = 0$ — это нетривиальные решения системы $(A - 0 \cdot I)x = 0$. В данном случае ранг матрицы коэффициентов равен 2, поэтому в фундаментальной системе 2 вектора $\Rightarrow$ имеется система ровно из двух линейно независимых собственных векторов для $\lambda = 0$. Таким образом, базиса из собственных векторов не существует, поэтому матрица A не может быть подобна диагональной матрице.

ПРИМЕР 2. Найти жорданову форму и соответствующий жорданов базис для

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Данная матрица имеет собственное значение $\lambda = 1$ кратности 4. Все пространство $\mathbb{C}^4$ является корневым для собственного значения $\lambda = 1$. С помощью сдвига перейдем к матрице $B = A - 1 \cdot I$ и

Лекция 35

35.1 Сингулярные числа и сингулярные векторы

Пусть $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Тогда $A^*A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ — эрмитова неотрицательно определенная матрица:

$$(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A; \qquad xA^*Ax = (Ax, Ax) = |Ax|^2 \ge 0 \;\; \forall \;\; x \in \mathbb{C}^n.$$

Поэтому все ее собственные значения неотрицательны.

Неотрицательные квадратные корни из собственных значений матрицы A^*A называются *сингулярными числами* матрицы A. Сингулярные числа $\sigma_i = \sigma_i(A)$ принято нумеровать по невозрастанию:

$$\sigma_1 \;\ge\; \sigma_2 \;\ge\; \dots \;\ge\; \sigma_r \;>\; \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0.$$

Будем считать, что A имеет r ненулевых сингулярных чисел.

Пусть $u_1, \dots, u_n$ — ортонормированный базис собственных векторов матрицы A^*A такой, что

$$A^*Au_i = \begin{cases} \sigma_i^2 u_i, & 1 \le i \le r, \\ 0, & r+1 \le i \le n. \end{cases}$$

Положим $v_i = Au_i/\sigma_i$, $1 \le i \le r$. Тогда $(v_i, v_j) = 0$ при $i \ne j$ и $(v_i, v_i) = 1$. Дополним систему $v_1, \dots, v_r$ векторами $v_{r+1}, \dots, v_m$ до ортонормированного базиса в $\mathbb{C}^m$. Заметим также, что при $j \ge r+1$

$$A^*Au_j = 0 \;\;\Rightarrow\;\; u_j^*A^*Au_j = 0 \;\;\Rightarrow\;\; (Au_j)^*(Au_j) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; |Au_j| = 0 \;\;\Rightarrow\;\; Au_j = 0.$$

В итоге получаем

$$A[u_1, \dots, u_n] = [v_1, \dots, v_m] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & \end{bmatrix} \;\;\Rightarrow\;\; AU = V\Sigma,$$

где $U = [u_1, \dots, u_n]$ и $V = [v_1, \dots, v_m]$ — унитарные матрицы, а Σ — диагональная прямоугольная матрица тех же размеров, что и матрица A.

Столбцы матриц U и V образуют *сингулярные базисы* матрицы A. Столбцы U называются *правыми сингулярными векторами*, а столбцы V — *левыми сингулярными векторами* матрицы A. Связь между сингулярными векторами и ненулевыми сингулярными числами устанавливается соотношениями

$$Au_i = \sigma_i v_i, \quad A^*v_i = \sigma_i u_i, \quad 1 \le i \le r.$$

Кроме того,

$$Au_i = 0, \quad r+1 \le i \le n, \qquad A^*v_i = 0, \quad r+1 \le i \le m.$$

Итак, мы доказали, что *для любой матрицы $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ имеет место равенство*

$$AU = V\Sigma \tag{$*$}$$

для некоторых унитарных матриц $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $V \in \mathbb{C}^{m \times m}$ и диагональной прямоугольной матрицы размеров $m \times n$ с числами $\sigma_i \ge 0$ при $i = j$. Записав $(*)$ в виде

$$A = V\Sigma U^*, \tag{$**$}$$

получаем представление матрицы, называемое ее *сингулярным разложением.* [1]

Если каким-то способом получено разложение $(**)$ с унитарными матрицами U и V, то $A^*A = U(\Sigma^*\Sigma)U^*$. Поэтому если Σ — диагональная прямоугольная матрица с неотрицательными элементами, то ее ненулевые элементы определены однозначно.

Задача. Найдите сингулярное разложение $2 \times n$-матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$.

35.2 Полярное разложение

Если $m = n$, то можно записать $(**)$ в виде

$$A = (V\Sigma V^*)(VU^*) = HQ,$$

где $H = V\Sigma V^*$ — неотрицательно определенная (поэтому также эрмитова) матрица, а $Q = VU^*$ — унитарная матрица (как произведение унитарных матриц). Представление матрицы A в виде $A = HQ$ с неотрицательно определенной H и унитарной Q называется ее *полярным разложением.*

Полярное разложение матрицы можно считать аналогом тригонометрической формы комплексного числа.

35.3 Выводы из сингулярного разложения

(1) *Число ненулевых сингулярных чисел r равно рангу матрицы A.*

(2) *Сингулярное разложение сопряженной матрицы имеет вид*

$$A^* = U\Sigma^\top V^*.$$

(3) $\mathrm{im}A = L(v_1, \dots, v_r)$, $\quad \ker A = L(u_{r+1}, \dots, u_n)$.

(4) $\mathrm{im}A^* = L(u_1, \dots, u_r)$, $\quad \ker A^* = L(v_{r+1}, \dots, v_m)$.

В качестве следствия можно получить представления пространств в виде ортогональных сумм

$$\mathbb{C}^n = \ker A \oplus \mathrm{im}A^*, \quad \mathbb{C}^m = \ker A^* \oplus \mathrm{im}A.$$

[1] Оно было получено совершенно другим способом в Лекции 27.

(5) $A = \sum\limits_{k=1}^{r} \sigma_k v_k u_k^*, \quad A^* = \sum\limits_{k=1}^{r} \sigma_k u_k v_k^*.$

(6) *Если $m = n = r$ (матрица A невырожденная), то*

$$A = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k v_k u_k^*, \quad A^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma_k} u_k v_k^*.$$

(7) *Пусть $\sigma_1 \ge \ldots \ge \sigma_n$ — сингулярные числа невырожденной матрицы A. Тогда $\sigma_n^{-1} \ge \ldots \ge \sigma_1^{-1}$ — сингулярные числа матрицы A^{-1}.*

(8) $||A||_2 = \sigma_1, \quad ||A||_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_r^2}.$

Спектральная и фробениусова нормы являются унитарно инвариантными. Поэтому $||A||_2 = ||\Sigma||_2$ и $||A||_F = ||\Sigma||_F$. Очевидно, $||\Sigma x||_2 \le \sigma_1 ||x||_2$; равенство достигается, если x имеет 1 в первой позиции и 0 в остальных.

Ясно также, что $||\Sigma||_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_r^2}$. $\square$

Задача. Дана квадратная матрица с нормой $||A||_2 \le 1$. Докажите, что существуют квадратные матрицы B, C, D такие, что матрица $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ является унитарной.

Задача. Пусть A — квадратная матрица и $H_A = (A + A^*)/2$ — ее эрмитова часть. Докажите, что для произвольной эрмитовой матрицы H того же порядка имеет место неравенство $||A - H_A||_2 \le ||A - H||_2$.

Задача. Докажите, что если H — эрмитова, а U — унитарная матрица того же порядка, то $||H - I||_2 \le ||H - U||_2 \le ||H + I||_2$.

35.4 Сингулярное разложение и решение систем

Утверждение. *Решение системы $Ax = b$ с невырожденной матрицей A имеет вид $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{\sigma_k} u_k$, где $\beta_k = v_k^* b = (v_k, b)$ — коэффициенты разложения вектора правой части b по сингулярным векторам $v_1, \dots, v_m$.*

Доказательство. Выражение для x сразу же получается из **(6)**. Если $b = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$, то $(b, v_k) = \beta_k (v_k, v_k) = \beta_k$ (вследствие ортонормированности системы векторов $v_1, \dots, v_n$). $\square$

Данное утверждение проясняет роль направления возмущений при решении систем. Если коэффициент β_k заменяется на $\beta_k + \varepsilon$, то коэффициент при u_k в разложении x по базису $u_1, \dots, u_n$ возмущается на величину ε / σ_k. Чем меньше σ_k, тем сильнее может измениться решение. При малом σ_n "особенно опасны" возмущения вектора правой части b в направлении вектора v_n.

35.5 Метод наименьших квадратов

Если система $Ax = b$ несовместна, то равенство $Ax = b$ не выполняется ни для одного вектора x. В этом случае, тем не менее, пытаются интересоваться такими x, при которых вектор $b - Ax$ (его называют *невязкой* для x) имеет минимально возможную длину.

Вектор x называется *псевдорешением* системы $Ax = b$, если

$$||b - Ax||_2 = \min_z ||b - Az||_2.$$

В данном методе определения "обобщенного решения" в вещественном случае речь действительно идет о наименьшем значении суммы квадратов (отсюда название метода)

$$||b - Ax||_2^2 = \sum_{i=1}^{m} (b_i - a_{i1}x_1 - \ldots - a_{in}x_n)^2.$$

Утверждение. *Пусть A — матрица размеров $m \times n$ и ранга r. Множество псевдорешений системы $Ax = b$ есть линейное многообразие, размерность которого равна $n - r$.*

Доказательство. Пусть h — перпендикуляр, опущенный из вектора b на подпространство $\mathrm{im}A$, а $y \in \mathrm{im}A$ — соответствующая ортогональная проекция. Тогда система $Az = y$ совместна, и если z — ее произвольное решение, то $|h| = |b - Az| < |b - Ax|$ для всех x таких, что $Ax \ne y$. Значит, множество псевдорешений совпадает с множеством решений совместной системы $Az = y$. $\square$

Среди всех псевдорешений выделяется псевдорешение $\hat{x}$ минимальной длины — оно называется *нормальным псевдорешением*. Геометрически ясно, что $\hat{x}$ есть перпендикуляр, опущенный на $\ker A$ из любого частного решения z совместной системы $Az = y$ (вектор y — ортогональная проекция вектора b на $\mathrm{im}A$). Таким образом, *нормальное псевдорешение существует и единственно.*

Сингулярное разложение позволяет дать явный вид нормального псевдорешения:

$$\hat{x} \; = \; \sum_{k=1}^{r} \frac{v_k^* b}{\sigma_k} u_k. \tag{$*$}$$

Для доказательства достаточно проверить, что $b - A\hat{x} \perp \mathrm{im}A$ и $\hat{x} \perp \ker A$.

Простота формулы не должна создавать впечатление об отсутствии проблем при вычислении $\hat{x}$. Главная проблема, собственно, в том, что в случае $r < \min(m, n)$ ранг r можно повысить сколь угодно малым возмущением элементов матрицы, а это означает, что нормальное псевдорешение, несмотря на факт существования и единственности, не является непрерывной функцией от элементов матрицы A. Например, пусть $m = n = 1$ и рассматривается система $0 \cdot x = 1$. Ее нормальное псевдорешение есть, очевидно, $\hat{x} = 0$, а нормальное псевдорешение возмущенной системы $\varepsilon \cdot x = 1$ есть $\hat{x}(\varepsilon) = 1/\varepsilon$. Как видим, $\hat{x}(\varepsilon)$ не стремится к $\hat{x}$ при $\varepsilon \to 0$. Сама задача о вычислении столь неустойчивого объекта не кажется очень уж осмысленной.

В то же время, задачи такого рода постоянно возникают в приложениях, и от нас требуются какие-то методы их решения. При построении таких методов следует иметь в виду, что это должны быть, прежде всего, *методы изменения самой постановки задачи*. Подобные вопросы связаны с так называемыми *методами регуляризации*. [2]

Задача. Найти нормальное псевдорешение несовместной системы

$$x_1 + x_2 + .. + x_n = 1, \quad x_1 + x_2 + ... + x_n = 0.$$

[2] Общую теорию методов регуляризации создал основатель факультета ВМиК академик Андрей Николаевич Тихонов.

35.6 Псевдообратная матрица

Формулу $(*)$ для нормального псевдорешения можно записать также в виде

$$\hat{x} \; = \; Mb, \quad M = U \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sigma_r \\ & & \end{bmatrix} V^*.$$

Матрица M называется *псевдообратной* (по Муру–Пенроузу) для матрицы A. В силу единственности нормального псевдорешения псевдообратная матрица определяется однозначно по матрице A. Обозначение: $M = A^+$.

Задача. Пусть A — произвольная прямоугольная матрица и A^+ — ее псевдообратная матрица. Докажите, что выполняются соотношения

$$(AA^+)^* = AA^+, \;\; (A^+A)^* = A^+A, \;\; AA^+A = A, \;\; A^+AA^+ = A^+.$$

Докажите также, что A^+ — единственная матрица, удовлетворяющая этой системе уравнений.

35.7 Наилучшие аппроксимации с понижением ранга

В каждой матрице $\sigma_k v_k u_k^*$ элемент в позиции (i, j) может рассматриваться как функция от i и j с разделенными дискретными переменными i и j: $f(i, j) = f_1(i) f_2(j)$. Таким образом, запись A в виде $A = \sum\limits_{i=1}^{r} \sigma_i v_i u_i^*$ описывает некоторый специальный способ разделения переменных в каждом члене суммы или, в матричной терминологии, скелетное разложение матрицы A — причем с важным дополнительным свойством ортонормированности систем $u_1, \dots, u_r$ и $v_1, \dots, v_r$.

Особая ценность и широта применений сингулярного разложения вызваны, прежде всего, тем, что оно дает простой и надежный механизм исключения из матрицы "наименее значимой информации" — путем ее аппроксимации суммой *меньшего числа слагаемых* с разделенными переменными i и j. Речь идет о поиске элемента наилучшего приближения для заданной матрицы A на довольно сложном множестве — множестве матриц, ранг которых ограничен заданным числом.

Теорема о наилучших аппроксимациях с понижением ранга. *Пусть матрица $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ задана сингулярным разложением вида*

$$A = \sum_{l=1}^{r} \sigma_l v_l u_l^*,$$

и условимся считать, что $\sigma_{r+1} = 0$. Пусть задано целое $1 \le k \le r$. Тогда

$$\min_{\substack{\mathrm{rank}B \le k \\ B \in \mathbb{C}^{m \times n}}} ||A - B||_2 \; = \; \sigma_{k+1} \; = \; ||A - A_k||_2, \quad \text{где} \quad A_k = \sum_{l=1}^{k} \sigma_l v_l u_l^*.$$

Доказательство. Пусть $\mathrm{rank}B \le k$. Тогда $\dim \ker B \ge n - k$. Рассмотрим линейную оболочку $L = L(u_1, \dots, u_{k+1})$, натянутую на старшие сингулярные векторы. По теореме Грассмана,

$$\dim(\ker B \cap L) = \dim \ker B + \dim L - \dim(\ker B + L) \ge (n - k) + (k + 1) - n = 1.$$

Поэтому существует ненулевой вектор $z \in \ker B \cap L$. Будем считать, что $||z||_2 = 1$. Учитывая, что

$$z = \sum_{l=1}^{k+1} \alpha_l u_l, \quad \sum_{l=1}^{k+1} |\alpha_l|^2 = 1,$$

находим

$$||A - B||_2 \geq ||(A - B)z||_2 = ||Az||_2 = \sqrt{\sum_{l=1}^{k+1} |\alpha_l|^2 \sigma_l} \geq \sigma_{k+1}.$$

В то же время,

$$A - A_k = \sum_{l=k+1}^{r} \sigma_l v_l u_l^* \;\Rightarrow\; ||A - A_k||_2 = \sigma_{k+1}. \qquad \square$$

35.8 Расстояние до множества вырожденных матриц

Если A — невырожденная матрица, то все матрицы $A+F$ при достаточно малой норме $||F||_2$ будут невырожденными (почему?). Под спектральным расстоянием между A и множеством вырожденных матриц понимается величина $\rho \equiv \inf\limits_{\det B = 0} ||A - B||_2$.

Из теоремы об аппроксимациях с понижением ранга вытекает, что

$$\rho \;=\; \inf_{\operatorname{rank} B \leq n-1} ||A - B||_2 \;=\; \sigma_n(A).$$

Таким образом, *спектральное расстояние от заданной невырожденной матрицы до множества вырожденных матриц равно ее минимальному сингулярному числу*.

Этот результат подчеркивает значение ортонормированных базисов: *если матрица V унитарная, то матрица $V + F$ будет невырожденной для всех возмущений F при условии* $||F||_2 < 1$ (докажите!). В частности, матрица $I + F$ будет невырожденной для всех возмущений F с нормой $||F||_2 < 1$.

Задача. Пусть $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n$ — сингулярные числа $n \times n$-матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & & & \\ & 1 & a_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a_{n-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \qquad a_1, \ldots, a_{n-1} > 0.$$

Докажите, что $0 < \sigma_n < 1/(a_1 \ldots a_{n-1})$.

Лекция 36

36.1 Квадратичные формы

Выражение $f = \sum\limits_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i x_j$ называется *квадратичной формой* от переменных $x_1, \ldots, x_n$. При $i \neq j$ в сумме имеются два члена, для которых

$$a_{ij}\, x_i x_j \;+\; a_{ji}\, x_j x_i \;=\; \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}\, (x_i x_j + x_j x_i).$$

Поэтому, не ограничивая общности, всегда полагают, что $a_{ij} = a_{ji}$.

Квадратичные формы успешно изучались еще до введения понятия матрицы. Современный подход, конечно, использует матрицы — они возникают здесь естественным образом:

$$f = x^\top A x, \quad \text{где} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Матрица A называется *матрицей квадратичной формы f*. Согласно нашей договоренности, $a_{ij} = a_{ji}$ — поэтому матрица A симметричная.

Пример. Пусть $f = x_1(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$. Тогда

$$f \;=\; [x_1 \;\; \ldots \;\; x_n]\, A \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \ldots & 1/2 \\ 1/2 & & & \\ \ldots & & 0 & \\ 1/2 & & & \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, в частности, что максимальное значение квадратичной формы f от вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$ при условии $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$ равно максимальному собственному значению вещественной симметричной матрицы A.

Задача. Пусть ранг вещественной симметричной матрицы порядка n равен 1 и, кроме того, $A^2 = A$. Докажите, что [1] $||A||_\infty \leq \frac{\sqrt{n}+1}{2}$.

36.2 Конгруэнтность

Замена переменных $x = Py$ с помощью невырожденной матрицы P делает f квадратичной формой от новых переменных:

$$f = x^\top A x = (Py)^\top A (Py) = y^\top (P^\top A P) y.$$

[1] Напомним, что $||A||_\infty \;=\; \max\limits_{1 \leq i \leq m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

Матрицы A и B, связанные равенством $B = P^\top A P$ для некоторой невырожденной матрицы P, называются *конгруэнтными*. Легко видеть, что отношение конгруэнтности есть отношение эквивалентности на множестве матриц фиксированного порядка.

Квадратичные формы от трех переменных нам уже встречались при изучении поверхностей второго порядка. В этом случае переменные были вещественными координатами, а матрица A — вещественной симметричной матрицей. Тогда нас особенно интересовали декартовы системы координат — поэтому требовалось, чтобы матрица P была ортогональной. Как следствие, переход от A к B в данном случае является одновременно преобразованием конгруэнтности и подобия.

36.3 Канонический вид квадратичной формы

Мы знаем, что любая вещественная симметричная матрица ортогонально подобна вещественной диагональной матрице:

$$\Lambda = P^\top A P, \qquad P^\top = P^{-1}, \qquad P \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

В новых переменных квадратичная форма f оказывается алгебраической суммой квадратов

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.$$

В общем случае от P можно требовать лишь невырожденности. Поиск соответствующей замены переменных (матрицы P) для заданной квадратичной формы называется *приведением к каноническому виду*. Если P — ортогональная матрица, то говорят о *приведении f к главным осям*.

Если $r = \operatorname{rank}\Lambda = \operatorname{rank} A$, то в данной сумме можно оставить только r членов, отвечающих $\lambda_i \neq 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0, \qquad \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_r < 0, \qquad \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Очевидно, k, $r-k$ и $n-r$ равны, соответственно, числу положительных, отрицательных и нулевых собственных значений матрицы A.

Тройка чисел $(k, r-k, n-r)$ называется *инерцией* вещественной симметричной матрицы A. Точно так же вводится понятие инерции для произвольной эрмитовой матрицы.

36.4 Закон инерции

Пусть все матрицы вещественные.

Теорема. *Вещественные симметричные матрицы конгруэнтны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую инерцию.*

Доказательство. Достаточно доказать совпадение инерций для конгруэнтных вещественных диагональных матриц. Пусть это матрицы Λ и $D = P^\top \Lambda P$, где P — вещественная невырожденная матрица. Конечно, D и Λ имеют общий ранг r. Пусть инерция D равна $(l, r-l, n-r)$, а инерция Λ равна $(k, r-k, n-r)$. Предположим, что

$$d_1, \ldots, d_l > 0, \quad d_{l+1}, \ldots, d_r < 0; \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0, \quad \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_r < 0.$$

Равенство $y^\top D y = x^\top \Lambda x$ при условии $x = Py$ означает, что

$$(d_1 y_1 \;+\; \ldots \;+\; d_l y_l^2) \;+\; (d_{l+1} y_{l+1}^2 \;+\; \ldots \;+\; d_r y_r^2) \;=$$

$$(\lambda_1 x_1 \;+\; \ldots \;+\; \lambda_k x_k^2) \;+\; (\lambda_{k+1} x_{k+1}^2 \;+\; \ldots \;+\; \lambda_r x_r^2). \qquad (*)$$

Рассмотрим два подпространства:

$$L = \{y \in \mathbb{R}^n : y_{l+1} = \ldots = y_n = 0\}, \qquad M = \{y \in \mathbb{R}^n : y = P^{-1}x, \;\; x_1 = \ldots = x_k = 0\}.$$

Легко видеть, что $\dim L = l$. Поскольку $y = P^{-1}x$, ясно, что $\dim M = n - k$. Если $l > k$, то $\dim L + \dim M > n \;\Rightarrow\;$ существует ненулевой вектор $y \in L \cap M$. Для этого вектора y левая часть в равенстве $(*)$ строго положительна, а правая часть отрицательна или равна нулю. Противоречие означает, что $l \leq k$. Противоположное неравенство тоже верно — достаточно поменять ролями x и y. $\square$

36.5 Эрмитова конгруэнтность

Комплексные матрицы A и B называются *эрмитово конгруэнтными*, если $B = P^* A P$ для некоторой невырожденной матрицы P. Это отношение эквивалентности на множестве $n \times n$-матриц (докажите!). Если матрица A эрмитова, то и B эрмитова.

Теорема. *Эрмитовы матрицы эрмитово конгруэнтны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую инерцию.*

Доказательство практически дословно повторяет предыдущее доказательство (надо лишь вместо x_i^2 и y_i^2 писать $|x_i|^2$ и $|y_i|^2$).

36.6 Канонический вид пары квадратичных форм

Если приходится одновременно иметь дело с парой поверхностей второго порядка в пространстве или с парой кривых второго порядка на плоскости, то разумно пытаться упростить их уравнения в одной и той же системе координат. В общем случае эта система координат будет аффинной.

Для простоты рассмотрим случай кривых на плоскости. Предположим, что одна из кривых является эллипсом. Тогда перейдем к такой декартовой системе, в который для нее получается уравнение $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Уравнение второй кривой в этой системе может иметь самый общий вид. Изменив масштабы по осям, перейдем к аффинной системе, в которой уравнением эллипса будет уравнение окружности $(x')^2 + (y')^2 = 1$. Уравнение второй кривой в новой (аффинной) системе имеет все еще общий вид. Но с помощью поворота, как мы знаем, для его квадратичной части можно получить форму $\lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2$. При этом поворот системы координат не может изменить формы первого уравнения! В сущности это же рассуждение переносится на более общий случай.

Теорема 1. *Пусть A и B — вещественные симметричные матрицы и при этом A положительно определенная. Тогда существует вещественная невырожденная матрица P такая, что матрицы $P^\top A P$ и $P^\top B P$ обе диагональные.*

Доказательство. Вещественная симметричная матрица A ортогонально подобна (поэтому и конгруэнтна) диагональной матрице

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = Q^\top A Q, \quad Q^\top = Q^{-1}.$$

В силу положительной определенности, $\lambda_i > 0$ для всех i. Далее заметим, что A конгруэнтна единичной матрице (по определению, $\Lambda^{-1/2} \equiv (\Lambda^{1/2})^{-1}$):

$$I = \Lambda^{-1/2} Q^\top A Q \Lambda^{-1/2} = (Q\Lambda^{-1/2})^\top A (Q\Lambda^{-1/2}).$$

Пусть то же преобразование конгруэнтности в применении к B дает матрицу

$$C = (Q\Lambda^{-1/2})^\top B (Q\Lambda^{-1/2}).$$

Легко проверить, что C остается вещественной симметричной матрицей. Следовательно, с помощью ортогональной матрицы Z получаем диагональную матрицу $D = Z^\top C Z$. В то же время, $Z^\top I Z = I$. Окончательно,

$$I = P^\top A P, \quad D = P^\top B P, \quad \text{где} \quad P = Q\Lambda^{-1/2} Z. \qquad \square$$

Следствие. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — вещественные квадратичные формы и $f(x) > 0$ для всех вещественных векторов $x \neq 0$. Тогда f и g можно привести к каноническому виду с помощью общей замены переменных.*

Вот вариант этой же теоремы в случае эрмитовых матриц и преобразования эрмитовой конгруэнтности — предыдущее доказательство модифицируется очевидным образом.

Теорема 2. *Пусть A и B — эрмитовы матрицы и A положительно определенная. Тогда существует невырожденная матрица P такая, что матрицы P^*AP и P^*BP обе диагональные.*

36.7 Метод Лагранжа

Простая идея, позволяющая получить канонический вид квадратичной формы, связана с выделением полных квадратов. В итоге вещественная симметричная матрица A приводится к конгруэнтной диагональной матрице $\Lambda = P^\top A P$ с помощью вещественной невырожденной матрицы P.

Эта идея ведет к так называемому методу Лагранжа. Чтобы понять его суть, рассмотрим квадратичную форму

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

Если $a_{11} \neq 0$, то полный квадрат выделяется следующим образом:

$$f = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3\right)^2 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right)x_2^2 + \left(a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}}\right)x_3^2 + 2\left(a_{23} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}}\right)x_2x_3$$

$$= \ b_{11}y_1^2 \ + \ b_{22}y_2^2 \ + \ b_{33}y_3^2 \ + \ 2b_{23}y_2y_3,$$

$$b_{11} = a_{11}, \quad b_{22} = a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}, \quad b_{33} = a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}}, \quad b_{23} = a_{23} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{11}},$$

$$y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3.$$

Таким образом, A конгруэнтна матрице

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix} = P_1^\top A P_1, \qquad P_1 = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} & a_{13}/a_{11} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следующий шаг очевиден — с помощью выделения полного квадрата исключить произведение y_2y_3.

С помощью метода Лагранжа можно найти инерцию матрицы A. Если же нужно получить ортогональную матрицу P, то следует обратиться к другим методам — например, к методу вращений.

Мы не будем здесь заниматься формализацией метода Лагранжа для симметричных матриц общего вида. Вместо этого мы рассмотрим случай вещественных положительно определенных матриц и метод квадратного корня — с помощью преобразований того же типа он решает ту же задачу, что и метод Лагранжа.

36.8 Метод квадратного корня

Пусть дана матрица A порядка n и A_k — ее $k \times k$-подматрица, расположенная на пересечении первых k строк и столбцов. Подматрицы $A_1, \ldots, A_n = A$ называются *ведущими подматрицами*, а их определители — *ведущими минорами* матрицы A.

Для вещественной симметричной матрицы A, в которой все ведущие миноры положительны, имеет место разложение $A = R^\top R$, где R — вещественная верхняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами. [2]

Предположим, что факт существования разложения уже доказан. Тогда нетрудно понять, как его можно вычислить. Для матрицы порядка $n = 3$ имеем

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & & \\ r_{12} & r_{22} & \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ & r_{22} & r_{23} \\ & & r_{33} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$r_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad r_{12} = a_{12}/r_{11}, \quad r_{13} = a_{13}/r_{11},$$

$$r_{22} = \sqrt{a_{22} - r_{12}^2}, \quad r_{23} = (a_{23} - r_{13}r_{12})/r_{22}, \quad r_{33} = \sqrt{a_{33} - r_{13}^2 - r_{23}^2}.$$

Вычисления аналогичны и в случае произвольного n. Метод называется *методом квадратного корня.*

Интересно, что в данном случае "как бы" не используется идея исключения элементов, но именно "как бы": чтобы объяснить, почему можно извлекать корни, проще всего вернуться к идее метода Гаусса.

Теорема. *Пусть A — матрица порядка n, в которой все ведущие миноры отличны от нуля. Тогда существуют единственные нижняя треугольная матрица L с единицами на диагонали и верхняя треугольная матрица U такие, что $A = LU$.*

Доказательство. Пусть $n = 3$. Первый шаг метода Гаусса дает

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l_{21} & 1 & 0 \\ -l_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}, \qquad l_{21} = a_{21}/a_{11}, \quad l_{31} = a_{31}/a_{11}.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ \hline l_{31} & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ \hline 0 & b_{32} & b_{33} \end{array}\right] \Rightarrow \det A_2 = a_{11}b_{22} \ \Rightarrow \ b_{22} \neq 0.$$

[2] В вычислительной алгебре разложение такого вида называют *разложением Холецкого.*

Поскольку $b_{22} \neq 0$, можно обойтись без перестановок строк и перейти ко второму шагу метода Гаусса:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l_{31} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix}, \quad l_{31} = b_{32}/b_{22}.$$

В итоге получаем

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что $\det A_3 = a_{11}b_{22}c_{33} \ \Rightarrow \ c_{33} \neq 0$ (это гарантирует возможность проведения третьего шага метода Гаусса без перестановок строк в случае $n > 3$). Единственность построенного LU-разложения проверяется непосредственно: первая строка в U и первый столбец в L определены однозначно, отсюда то же самое получаем для второй строки в U и второго столбца в L, и так далее. Обобщение доказательства на случай произвольного n не представляет никакой трудности. $\square$

Следствие. *Для любой вещественной симметричной матрицы, в которой все ведущие миноры положительны, существует вещественная верхняя треугольная матрица R такая, что $A = R^\top R$. Элементы главной диагонали R могут быть выбраны положительными, при этом ограничении R единственна.*

Доказательство. Воспользуемся существованием и единственностью LU-разложения $A = LU$, в котором L имеет единицы на главной диагонали. Пусть D — диагональная матрица с главной диагональю, взятой из матрицы $U = [u_{ij}]$. Поскольку $\det A_k = u_{11} \ldots u_{kk}$ для всех k, находим, что $u_{kk} > 0$ для всех k.

В силу симметричности матрицы A,

$$A = A^\top = LU = (U^\top D^{-1})(DL) \ \Rightarrow \ L = U^\top D^{-1}.$$

Отсюда $A = (D^{-1/2}U)^\top (D^{-1/2}U)$. Таким образом, $R = D^{-1/2}U$. Единственность проверяется непосредственно — так же, как в случае LU-разложения. $\square$

Замечание. Определитель вещественной симметричной положительно определенной матрицы положителен (как произведение положительных собственных значений). Легко показать, что свойство положительной определенности наследуется всеми ведущими подматрицами $\Rightarrow$ все ее ведущие миноры положительны. Поэтому метод квадратного корня можно применять для любой вещественной симметричной положительно определенной матрицы. Метод квадратного корня легко переносится также на случай комплексных положительно определенных матриц (они обязательно эрмитовы). Для таких матриц всегда имеет место разложение $A = R^*R$, где R — комплексная верхняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами.

Задача. Доказать, что для любой положительно определенной матрицы $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ имеет место неравенство

$$\det A \ \leq \ a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}.$$

36.9 Критерий положительной определенности

Докажем важный результат, известный как *критерий Сильвестра.*

Теорема. *Пусть дана эрмитова матрица. Для ее положительной определенности необходимо и достаточно, чтобы все ее ведущие миноры были положительны.*

Доказательство. Необходимость вытекает из того, что свойство положительной (и неотрицательной) определенности эрмитовой матрицы A порядка n наследуется ее ведущими подматрицами $A_1, \ldots, A_n$ — нужно лишь учесть равенство

$$[x_1, \ldots, x_k] \, A_k \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_k \end{bmatrix} \ = \ [x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0] \, A \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_k \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Из положительной определенности матрицы A_k следует, что все ее собственные значения положительны $\Rightarrow$ $\det A_k > 0$ (как произведение положительных собственных значений). Достаточность получается из разложения $A = R^*R$, где R — верхняя треугольная матрица: для любого $x \neq 0$ получаем $x^*Ax = x^*(R^*R)x = (Rx)^*(Rx) > 0$. $\square$

Задача. Матрица $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ является эрмитовой, а ее подматрица A_{11} — положительно определенной. Доказать, что положительная определенность матрицы A равносильна положительной определенности матрицы $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$.

Лекция 37

37.1 Разделение собственных значений эрмитовой матрицы

Пусть эрмитова матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ записана в блочном виде

$$A \;=\; \begin{bmatrix} B & u \\ u^* & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}, \;\; u \in \mathbb{C}^{n-1}. \tag{1}$$

Ясно, что подматрица B тоже эрмитова. Пусть $\mu_1 \ge \ldots \ge \mu_{n-1}$ — ее собственные значения, и пусть Q — унитарная матрица порядка $n-1$, приводящая ее к диагональному виду

$$Q^*BQ = \begin{bmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} Q^* & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & u \\ u^* & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & \\ & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & s_1 \\ & \ddots & & \\ & & \mu_{n-1} & s_{n-1} \\ \bar{s}_1 & \ldots & \bar{s}_{n-1} & s_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} s_1 \\ \ldots \\ s_{n-1} \end{bmatrix} = Q^*u, \quad s_n = \bar{s}_n = a_{nn}.$$

Характеристический многочлен матрицы A легко вычисляется:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} \mu_1 - \lambda & & & s_1 \\ & \ddots & & \\ & & \mu_{n-1} - \lambda & s_{n-1} \\ \bar{s}_1 & \ldots & \bar{s}_{n-1} & s_n - \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} (\mu_i - \lambda) \left(s_n - \lambda - \frac{|s_1|^2}{\mu_1 - \lambda} - \ldots - \frac{|s_{n-1}|^2}{\mu_{n-1} - \lambda} \right).$$

Следовательно, если собственное значение λ матрицы A не совпадает ни с одним из собственных значений $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ ее подматрицы B, то оно удовлетворяет уравнению

$$\lambda \;=\; F(\lambda) \equiv \frac{|s_1|^2}{\lambda - \mu_1} + \ldots + \frac{|s_{n-1}|^2}{\lambda - \mu_{n-1}} + s_n.$$

Утверждение. *Пусть эрмитова матрица A порядка n с собственными значениями $\lambda_1 \ge \ldots \ge \lambda_n$ имеет блочное разбиение (1), в котором B — ее эрмитова подматрица порядка $n-1$ с собственными значениями $\mu_1 \ge \ldots \ge \mu_{n-1}$. Тогда если*

$$\mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_{n-1} \quad \textit{и} \quad s_i \ne 0, \quad 1 \le i \le n-1,$$

то имеют место соотношения разделения

$$\lambda_1 > \mu_1 > \lambda_2 > \mu_2 > \ldots > \lambda_{n-1} > \mu_{n-1} > \lambda_n. \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим график функции $y = F(\lambda)$ (λ и y — переменные осей абсцисс и ординат). Очевидно, $F(\lambda)$ не определено при $\lambda = \mu_k$. Поскольку $F(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to \mu_k$, естественно говорить, что $F(\lambda)$ при $\lambda = \mu_k$ обращается в бесконечность. Изучим поведение функции $F(\lambda)$ на каждом из n интервалов

$$I_n = (-\infty, \mu_{n-1}), \quad I_{n-1} = (\mu_{n-1}, \mu_{n-2}), \quad \ldots, \quad I_2 = (\mu_2, \mu_1), \quad I_1 = (\mu_1, +\infty).$$

Пусть $\lambda \in I_k$, $2 \le k \le n-1$. Тогда

$$\frac{|s_k|^2}{\lambda - \mu_k} + \frac{|s_{k-1}|^2}{\lambda - \mu_{k-1}} \;\to\; \begin{cases} +\infty & \text{при} \quad \lambda \to \mu_k, \\ -\infty & \text{при} \quad \lambda \to \mu_{k-1}, \end{cases}$$

а остальные слагаемые в представлении $F(\lambda)$ являются ограниченными. Поэтому

$$F(\lambda) \;\to\; \begin{cases} +\infty & \text{при} \quad \lambda \to \mu_k, \\ -\infty & \text{при} \quad \lambda \to \mu_{k-1}. \end{cases}$$

В силу непрерывности $F(\lambda)$, прямая $y = \lambda$ имеет при $\lambda \in I_k$ точку пересечения с графиком функции $y = F(\lambda)$. Случаи $\lambda \in I_1$ и $\lambda \in I_n$ рассматриваются аналогично. Таким образом, уравнение $F(\lambda) = \lambda$ имеет n различных корней. Ни один из них не совпадает ни с одним из чисел μ_k и поэтому каждый из них является собственным значением матрицы A. $\square$

Если B имеет кратные собственные значения или $s_k = 0$ для каких-то k, строгие неравенства в соотношениях разделения (2) следует заменить на нестрогие неравенства. Можно было бы рассуждать таким образом: с помощью сколь угодно малых возмущений можно сделать $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ попарно различными, а все s_k ненулевыми, при этом для возмущенной матрицы A можно применить доказанное утверждение, а затем перейти к пределу. Чтобы это рассуждение сделать строгим, требуется факт непрерывной зависимости собственных значений матрицы от ее коэффициентов. Этот важный факт действительно имеет место. Но мы пойдем другим путем — случай нестрогих неравенств легко анализируется на основе вариационных свойств собственных значений эрмитовой матрицы.

Задача. Даны эрмитова матрица H и столбец b. Докажите неравенство

$$\left\| \begin{bmatrix} H & b \\ b^* & 0 \end{bmatrix} \right\|_2 \;\le\; \frac{||H||_2 + \sqrt{||H||_2^2 + 4||b||_2^2}}{2}.$$

37.2 Вариационные свойства собственных значений

Под вариационными свойствами понимаются свойства, связанные с минимальными или максимальными значениями каких-то функций. В случае эрмитовой матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ в качестве такой функции от векторов $x \in \mathbb{C}^n$ рассматривается так называемое *отношение Рэлея*

$$\Phi_A(x) = \frac{x^*Ax}{x^*x}, \quad x \ne 0.$$

Лемма. *В любом подпространстве $L \subset \mathbb{C}^n$ существуют векторы $x_{\min}(L)$ и $x_{\max}(L)$, принадлежащие L и такие, что*

$$\Phi_A(x_{\min}) \le \Phi_A(x) \le \Phi_A(x_{\max}) \quad \forall \;\; x \in L, \;\; x \ne 0.$$

Доказательство. Функция $\Phi_A(x)$ непрерывна на единичной сфере $||x||_2 = 1$ конечномерного пространства L. По теореме Вейерштрасса, она принимает там наименьшее и наибольшее значение в каких-то точках $x_{\min}$ и $x_{\max}$. Легко проверить, что эти точки являются искомыми. $\square$

Теорема Куранта–Фишера. *Собственные значения $\lambda_1(A) \ge \ldots \ge \lambda_n(A)$ эрмитовой матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ связаны с отношением Рэлея $\Phi_A(x)$ следующим образом:*

$$\lambda_k(A) \;=\; \max_{\dim L = k} \; \min_{x \in L,\, x \ne 0} \Phi_A(x) \;=\; \min_{\dim L = n-k+1} \; \max_{x \in L,\, x \ne 0} \Phi_A(x). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^n$ — ортонормированный базис собственных векторов матрицы A: $Av_i = \lambda_i v_i$, $1 \le i \le n$.

Пусть $L_k = L(v_1, \ldots, v_k)$ и $x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k \in L_k$, $x \ne 0$. $\Rightarrow$

$$\Phi_A(x) = \frac{\lambda_1|\alpha_1|^2 + \ldots + \lambda_k|\alpha_k|^2}{|\alpha_1|^2 + \ldots + |\alpha_k|^2} \ge \lambda_k, \quad \Phi_A(v_k) = \lambda_k \quad \Rightarrow \quad \min_{x \in L_k,\, x \ne 0} \Phi_A(x) = \lambda_k.$$

Рассмотрим также подпространство $M_k = L(v_k, \ldots, v_n)$ размерности $n - k + 1$. Пусть $x = \alpha_k v_k + \ldots + \alpha_n v_n \in M_k$, $x \ne 0 \quad \Rightarrow$

$$\Phi_A(x) = \frac{\lambda_k|\alpha_k|^2 + \ldots + \lambda_n|\alpha_n|^2}{|\alpha_k|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2} \le \lambda_k, \qquad \Phi_A(v_k) = \lambda_k \quad \Rightarrow \quad \max_{x \in M_k,\, x \ne 0} \Phi_A(x) = \lambda_k.$$

Пусть теперь L — произвольное подпространство размерности k. В силу теоремы Грассмана, $\dim(L \cap M_k) \ge 1 \quad \Rightarrow \quad$ существует ненулевой вектор $z \in (L \cap M_k)$. Тогда

$$\min_{x \in L,\, x \ne 0} \Phi_A(x) \;\le\; \Phi_A(z) \;\le \max_{x \in M_k,\, x \ne 0} \Phi_A(x) = \lambda_k.$$

Таким образом, первое из соотношений (3) доказано.

Чтобы получить второе соотношение, возьмем произвольное подпространство L размерности $n - k + 1$. Тогда существует ненулевой вектор $z \in L \cap L_k \quad \Rightarrow$

$$\max_{x \in L,\, x \ne 0} \Phi_A(x) \;\ge\; \Phi_A(z) \;\ge\; \min_{x \in L_k,\, x \ne 0} \Phi_A(x) = \lambda_k. \qquad \square$$

37.3 Соотношения разделения

Теорема. *Пусть эрмитова матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ имеет собственные значения*

$$\lambda_1 \ge \ldots \ge \lambda_n,$$

и пусть $B \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ — ее эрмитова подматрица в блочном разбиении вида (1), имеющая собственные значения

$$\mu_1 \ge \ldots \ge \mu_{n-1}.$$

Тогда имеют место соотношения разделения

$$\lambda_1 \ge \mu_1 \ge \lambda_2 \ge \mu_2 \ge \ldots \ge \lambda_{n-1} \ge \mu_{n-1} \ge \lambda_n.$$

Доказательство. Обозначим через M подпространство векторов $x = [x_1, \ldots, x_n]^\top$, определяемое уравнением $x_n = 0$. Пусть отображение $\nu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ задается правилом $\nu(x) = [x_1 \ldots, x_{n-1}]^\top$. Тогда очевидно, что если $x \in M$, то $\Phi_A(x) = \Phi_B(\nu(x))$.

Пусть $1 \le k \le n-1$. Согласно теореме Куранта–Фишера, находим

$$\begin{aligned} \lambda_k \;\; &= \;\; \max_{\dim L = k} \; \min_{x \in L,\, x \ne 0} \Phi_A(x) \;\ge\; \max_{\dim L = k,\, L \subset M} \; \min_{x \in L,\, x \ne 0} \Phi_A(x) = \\ &\max_{\dim L = k,\, L \subset M} \; \min_{x \in L,\, x \ne 0} \Phi_B(\nu(x)) \;=\; \max_{\dim L = k,\, L \subset \mathbb{C}^{n-1}} \; \min_{y \in L,\, y \ne 0} \Phi_B(y) \;=\; \mu_k. \end{aligned}$$

Пусть теперь $2 \le k \le n$. Согласно той же теореме Куранта–Фишера,

$$\begin{aligned} \lambda_k \;\; &= \;\; \min_{\dim L = n-k+1} \; \max_{x \in L,\, x \ne 0} \Phi_A(x) \;\le\; \min_{\dim L = n-k+1,\, L \subset M} \; \max_{x \in L,\, x \ne 0} \Phi_A(x) = \\ &\min_{\dim L = n-k+1,\, L \subset M} \; \max_{x \in L,\, x \ne 0} \Phi_B(\nu(x)) = \\ &\min_{\substack{\dim L \,=\, (n-1)-(k-1)+1 \\ L \subset \mathbb{C}^{n-1}}} \; \max_{y \in L,\, y \ne 0} \Phi_B(y) \;=\; \mu_{k-1}. \qquad \square \end{aligned}$$

В качестве простого следствия можно получить еще одно доказательство достаточности уже известного нам критерия положительной определенности эрмитовой матрицы: *для положительной определенности необходимо и достаточно, чтобы все ее ведущие миноры были положительны.*

Пусть $\lambda_{1k} \ge \ldots \ge \lambda_{kk}$ — собственные значения ведущей подматрицы A_k порядка k. Достаточно доказать, что $\lambda_{kk} > 0$. Пусть известно, что все ведущие миноры положительны:

$$\det A_k = \lambda_{1k} \ldots \lambda_{kk} > 0, \quad 1 \le k \le n.$$

Очевидно, $\lambda_{11} > 0$. Пусть уже доказано, что $\lambda_{k-1\,k-1} > 0$. В силу соотношений разделения, $\lambda_{k-1\,k} \ge \lambda_{k-1\,k-1} > 0$. Далее,

$$\det A_k \;=\; (\lambda_{1k} \ldots \lambda_{k-1\,k})\, \lambda_{kk} > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{kk} > 0. \qquad \square$$

Задача. Пусть $\sigma_1 \ge ... \ge \sigma_n$ — сингулярные числа $n \times n$-матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & & & \\ & 1 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Докажите, что $1 \le \sigma_{n-1} \le ... \le \sigma_1 \le 3$ и, кроме того, $0 < \sigma_n < 2^{-n+1}$.

37.4 Критерий неотрицательной определенности

Легко видеть, что ведущие подматрицы наследуют также свойство неотрицательной определенности. Поэтому для неотрицательной определенности эрмитовой матрицы необходимо, чтобы ее ведущие миноры были неотрицательными. Однако, пример матрицы $A = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ показывает, что этого уже не достаточно. Кроме ведущих миноров, теперь нужно вовлечь в рассмотрение также все *главные миноры* и *главные подматрицы* — так называются миноры и подматрицы, расположенные на пересечении строк и столбцов с одинаковой системой номеров. Заметим, что в эрмитовой матрице все главные подматрицы будут эрмитовы.

Лемма 1. Пусть $r = \mathrm{rank} A$. Тогда подматрица порядка r, расположенная на пересечении любых r линейно независимых строк и любых r линейно независимых столбцов, будет невырожденной.

Доказательство. Обозначим эту подматрицу через B, и пусть R — подматрица размеров $r \times n$, образованная заданными строками. Каждый столбец A есть линейная комбинация столбцов, на которых находится B. $\Rightarrow$ Каждый столбец R есть линейная комбинация столбцов B. Поэтому если $k \equiv \mathrm{rank} B < r$, то каждый столбец R есть линейная комбинация k базисных столбцов B $\Rightarrow$ $\mathrm{rank} R < r$ $\Rightarrow$ строки R линейно зависимы, а это противоречит предположению. $\square$

Лемма 2. *Среди отличных от нуля миноров порядка r эрмитовой матрицы ранга r имеется главный минор.*

Доказательство. Пусть $A = A^*$. Тогда если r строк (столбцов) линейно независимы, то r столбцов (строк) с теми же номерами также линейно независимы. По лемме 1, минор на их пересечении отличен от нуля. Он же, очевидно, главный. $\square$

Лемма 3. *Пусть A — невырожденная эрмитова матрица порядка $n \ge 2$, в которой главные миноры порядка k для всех k от 1 до $n-1$ равны нулю. Тогда $n = 2$ и $\det A < 0$.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1 \ge \ldots \ge \lambda_n$ — собственные значения матрицы A. Если $\lambda_k > 0$ при каком-то k из промежутка от 2 до n, то из соотношений разделения следует, что все главные подматрицы порядка $k-1$ имеют положительные собственные значения и поэтому невырожденные. Если $\lambda_1 < 0$, то все главные миноры отличны от нуля. Таким образом,

$$\lambda_1 > 0 > \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_n.$$

В то же время, если главные миноры первого и второго порядка равны нулю, то любая главная подматрица второго порядка нулевая:

$$\det \begin{bmatrix}0 & a\\ \bar{a} & 0\end{bmatrix} = -|a|^2 = 0 \;\Rightarrow\; a = 0.$$

Из соотношений разделения получаем $\lambda_2 \ge 0$. Поскольку противоречие возникает при $n > 2$, должно быть $n = 2$. В этом случае $\det A = \lambda_1 \lambda_2 < 0$. $\square$

Теорема. *Для неотрицательной определенности эрмитовой матрицы необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры были неотрицательны.*

Доказательство. Необходимость ясна, так как свойство неотрицательной определенности наследуется любой главной подматрицей. Докажем достаточность.

Пусть $\lambda_1 \ge \ldots \ge \lambda_n$ — собственные значения матрицы A.

Пусть $r = \mathrm{rank} A$. По лемме 2, имеется невырожденная главная подматрица порядка r. Обозначим ее через B. По лемме 3, если $r > 2$, в B существует невырожденная главная подматрица порядка $r - 1$. Отсюда ясно, что с помощью некоторой матрицы перестановки P из B можно получить эрмитову матрицу $P^{\top} B P$, в которой все ведущие

миноры отличны от нуля и, следовательно, положительны. В силу критерия положительной определенности, B является положительно определенной матрицей $\Rightarrow$ все ее собственные значения положительны $\Rightarrow$ $\lambda_{r-1} > 0$. Если $\lambda_r < 0$, то и $\lambda_{r+1} < 0$ $\Rightarrow$ $\mathrm{rank} A > r$. Значит, $\lambda_r > 0$ и $\lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$. Неотрицательность всех собственных значений эрмитовой матрицы влечет за собой ее неотрицательную определенность. $\square$

37.5 Вариационные свойства сингулярных чисел

Теорема. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ имеет сингулярные числа*

$$\sigma_1(A) \ge \ldots \ge \sigma_{\min(m,n)}(A).$$

Тогда при всех $1 \le k \le \min(m,n)$

$$\sigma_k(A) \;=\; \max_{\dim L = k}\; \min_{x \in L,\, x \ne 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_2} \;=\; \min_{\dim L = n-k+1}\; \max_{x \in L,\, x \ne 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_2}.$$

Доказательство. Заметим, что $\sigma_k(A) = \sqrt{\lambda_k(A^*A)}$. Очевидно также, что

$$\frac{||Ax||_2}{||x||_2} = \sqrt{\frac{x^*(A^*A)x}{x^*x}}, \quad x \ne 0.$$

Таким образом, все сразу же следует из вариационных свойств собственных значений эрмитовой матрицы A^*A. $\square$

Задача. Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и $f_k(A) = \sigma_1(A) + \ldots + \sigma_k(A)$. Докажите, что для любого $1 \le k \le n$ функция $f_k(A)$ является матричной нормой на $\mathbb{C}^{n \times n}$.

Задача. Докажите, что для любой квадратной матрицы A наименьшее собственное значение ее эрмитовой части $H = (A + A^*)/2$ не больше наименьшего сингулярного числа матрицы A.

37.6 Разделение сингулярных чисел

Теорема. *Пусть $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ и $B \in \mathbb{C}^{m \times (n-1)}$ — подматрица, состоящая из первых $n-1$ столбцов матрицы A. Тогда для сингулярных чисел A и B имеют место соотношения разделения*

$$\sigma_1(A) \;\ge\; \sigma_1(B) \;\ge\; \sigma_2(A) \;\ge\; \ldots \;\ge\; \sigma_{n-1}(B) \;\ge\; \sigma_n(A).$$

Доказательство. Согласно условию теоремы, A имеет вид $A = [B, v]$, где v — ее последний столбец. Значит,

$$A^*A \;=\; \begin{bmatrix}B^*\\ v^*\end{bmatrix} \begin{bmatrix}B & v\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix}B^*B & B^*v\\ v^*B & v^*v\end{bmatrix}.$$

Искомые неравенства получаются из соотношений разделения для эрмитовой матрицы A^*A порядка n и ее ведущей подматрицы B^*B порядка $n - 1$. $\square$

Лекция 38

38.1 Сопряженный оператор

Пусть $\mathcal{A} : V \to W$ — произвольный оператор, а V и W — пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_V$ и $(\cdot,\cdot)_W$. Попробуем построить оператор $\mathcal{A}^* : W \to V$, обладающий свойством

$$(\mathcal{A}(x), y)_W = (x, \mathcal{A}^*(y))_V \quad \forall\;\; x \in V, \;\; \forall\;\; y \in W. \qquad (*)$$

Утверждение. *Если оператор $\mathcal{A}^*$ существует, то он является линейным и единствен.*

Доказательство. $(\mathcal{A}^*(\alpha u + \beta v), x)_W = (\alpha u + \beta v, \mathcal{A}(x))_V = \alpha(u, \mathcal{A}(x))_V + \beta(v, \mathcal{A}(x))_V =$

$$\alpha(\mathcal{A}^*(u), x)_W + \beta(\mathcal{A}^*(v), x)_W = (\alpha\mathcal{A}^*(u) + \beta\mathcal{A}^*(v), x)_W.$$

Положим $z = \mathcal{A}^*(\alpha u + \beta v) - \alpha\mathcal{A}^*(u) - \beta\mathcal{A}^*(v)$. Мы доказали, что $(z, x)_V = 0 \;\forall\; x \in V$. Это верно, в частности, для $x = z$ $\Rightarrow$ $(z,z)_V = 0$ $\Rightarrow$ $z = 0$.

Докажем единственность. Предположим, что для некоторого $y \in W$ имеем $(\mathcal{A}(x), y)_W = (x, z_1)_V = (x, z_2)_V \;\forall\; x \in V$. Тогда, взяв $x = z_1 - z_2$, находим $(x,x)_V = 0$ $\Rightarrow$ $z_1 = z_2$. $\square$

Следствие. *Если операторы $\mathcal{A} : V \to W$ и $\mathcal{A}^* : W \to V$ связаны соотношением $(*)$, то они оба являются линейными.*

Типичная ситуация, в которой сопряженный оператор очень полезен, такая. Предположим, имеется операторное уравнение $\mathcal{A}(u) = f$ с обратимым оператором $\mathcal{A}$ и при этом для различных правых частей f требуется вычислить значение линейного функционала

$$\Phi(u) = (u, \phi)_V,$$

заданного одним и тем же вектором ϕ.

Определение сопряженного оператора $(\mathcal{A}(u), z)_W = (u, \mathcal{A}^*(z))$ приводит к следующей идее: вместо того чтобы многократно решать уравнение $\mathcal{A}(u) = f$ для различных f, рассмотреть сопряженное уравнение $\mathcal{A}^*(z) = \phi$, найти его решение z, а затем использовать формулу

$$\Phi(u) = (f, z)_W.$$

Замечательно, что $\Phi(u)$ можно найти, не вычисляя u. [1]

Теорема. *Пусть $\mathcal{A} : V \to W$ — линейный оператор. Если пространства V и W конечномерны, то оператор $\mathcal{A}^*$, удовлетворяющий равенству $(*)$, существует и единствен.*

[1] Глубокое изучение сопряженных уравнений, во многом навеянное данной общей идеей, выполнил академик Гурий Иванович Марчук — последний президент Академии наук СССР.

При этом в паре ортонормированных базисов сопряженному оператору соответствует сопряженная матрица.

Доказательство. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — ортонормированный базис в V, а $w_1, \ldots, w_m$ — ортонормированный базис в W. Обозначим через $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$ матрицу оператора $\mathcal{A}$ в данной паре базисов. В силу ортонормированности,

$$a_{ij} = (\mathcal{A}v_j, w_i), \quad 1 \le i \le m, \;\; 1 \le j \le n.$$

Чтобы определить оператор $\mathcal{A}^*$, рассмотрим разложение $\mathcal{A}^* w_i = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$. Умножая скалярно на v_j, находим $\alpha_j = (\mathcal{A}^* w_i, v_j) = (w_i, \mathcal{A}v_j)$, $1 \le j \le n$. Таким образом, матрица $B = [b_{ji}]$ линейного оператора $\mathcal{A}^*$ в паре базисов $\{w_i\}$ и $\{v_j\}$ должна иметь элементы

$$b_{ji} = (w_i, \mathcal{A}v_j) = \overline{(\mathcal{A}v_j, w_i)} = \bar{a}_{ij} \;\;\Rightarrow\;\; B = A^*.$$

Ясно также, что мы получили единственность оператора $\mathcal{A}^*$. Существование доказывается так: рассмотрим оператор, заданный матрицей A^*, и проверим, что для него выполняется равенство $(*)$:

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j, \quad y = \sum_{i=1}^{m} y_i w_i \;\;\Rightarrow\;\; (\mathcal{A}x, y)_W = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \bar{y}_i = (x, \mathcal{A}^* y)_V,$$

что и требовалось доказать. $\square$

38.2 Матрица сопряженного оператора

Пусть $V = \mathbb{C}^n$ и $W = \mathbb{C}^m$. Как мы знаем, произвольные скалярные произведения в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$ имеют вид

$$(p, q)_V = q^* S p, \quad (y, z)_W = z^* T y,$$

где $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ и $T \in \mathbb{C}^{m \times m}$ — эрмитовы положительно определенные матрицы.

Пусть линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ определяется умножением на матрицу $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, а сопряженный оператор — умножением на матрицу $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Тогда для любых $x \in \mathbb{C}^n$ и $y \in \mathbb{C}^m$ должно быть

$$y^* T(Ax) = (By)^* S x \;\;\Rightarrow\;\; y^*(TA)x = y^*(B^*S)x \;\;\Rightarrow\;\; TA = B^*S \;\;\Rightarrow\;\; B = S^{-1}A^*T.$$

Разные скалярные произведения в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$ приводят, конечно, к разным сопряженным операторам — но, как видим, любой из них есть умножение на матрицу вида $S^{-1}A^*T$, где S и T — эрмитовы положительно определенные матрицы, задающие скалярные произведения.

Пусть A — матрица линейного оператора $\mathcal{A} : V \to W$, $\dim V = n$, $\dim W = m$, в какой-то паре базисов. Если x и y — вектор-столбцы из координат разложения прообраза и образа при действии $\mathcal{A}$, то получаем $y = Ax$. Пусть теперь $x = By$. Тогда $Sx = A^*Ty$ $\Rightarrow$ замена $\tilde{x} = Sx$, $\tilde{y} = Ty$ приводит к соотношению $\tilde{x} = A^*\tilde{y}$ $\Rightarrow$ *в паре базисов, определенных столбцами матриц T^{-1} и S^{-1}, матрица оператора $\mathcal{A}^*$ имеет вид A^**. Легко видеть, что это базисы, биортогональные (в скалярных произведениях пространств W и V, соответственно) для базисов, в которых получена матрица A (см. раздел 25.7).

38.3 Нормальный оператор

Пусть $\mathcal{A} : V \to V$ — линейный оператор, V — пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_V$. Если $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ называется *нормальным оператором*. Данное свойство зависит от скалярного произведения: в другом скалярном произведении $\mathcal{A}$ может не быть нормальным.

Задача. Пусть $\mathcal{A} : V \to V$ — линейный оператор в произвольном конечномерном унитарном пространстве V. Докажите, что существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ является верхней треугольной.

Изучение нормальных операторов легко сводится к изучению нормальных матриц: достаточно выбрать в V ортонормированный базис, тогда нормальность оператора равносильна нормальности его матрицы в данном базисе. Отсюда ясно, что нормальный оператор является оператором простой структуры. Заметим также,что любой оператор простой структуры можно сделать нормальным за счет выбора скалярного произведения (докажите!).

Важнейшие классы нормальных операторов: унитарные операторы ($\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$) и эрмитовы (самосопряженные) операторы ($\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$). Пусть $\mathcal{A}$ — нормальный оператор. Легко доказывается, что *унитарность оператора $\mathcal{A}$ равносильна тому, что все его собственные значения по модулю равны* 1, *а эрмитовость равносильна вещественности собственных значений*. Подчеркнем, что унитарность и эрмитовость оператора зависят от скалярного произведения.

38.4 Самосопряженный оператор

Если $(\mathcal{A}x, y)_V = (x, \mathcal{A}y)_V \ \ \forall \ \ x, y \in V$, то, в силу единственности сопряженного оператора, $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. В таких случаях $\mathcal{A}$ называется *самосопряженным* оператором. Если $(\mathcal{A}x, x) > 0$ при всех $x \in V, \ x \neq 0$, то оператор называется *положительно определенным*.

Если $V = \mathbb{C}^n$ и скалярное произведение $(x, y)_S = y^* S x$ определяется с помощью эрмитовой положительно определенной матрицы $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$, то, согласно предыдущему разделу, самосопряженность оператора умножения на матрицу $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ означает, что

$$A = S^{-1} A^* S. \tag{$*$}$$

Заметим, что равенство $S^{-1/2}\, S\, S^{-1/2} = I$ означает, что столбцы матрицы $S^{-1/2}$ образуют ортонормированный базис относительно скалярного произведения $(\cdot\ \cdot)_S$. Матрица B оператора умножения на A в данном базисе определяется равенством

$$AS^{-1/2} = S^{-1/2} B \ \ \Rightarrow \ \ B = S^{1/2} A S^{-1/2}.$$

Самосопряженность означает, что B должна быть эрмитовой матрицей — это легко также вывести непосредственно из ($*$). Как видим, матрица A подобна эрмитовой матрице $B \ \ \Rightarrow$ все ее собственные значения вещественны.

38.5 Минимизация на подпространствах

Обсудим важную идею, позволяющую строить методы решения системы $Ax = b$, совсем не похожие на известный нам метод Гаусса. Пусть $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ — невырожденная матрица.

Рассмотрим так называемые *подпространства Крылова* [2]

$$L_k \ = \ L(b,\, Ab,\, \dots,\, A^{k-1}b), \quad k = 1,\, 2,\, \dots\,,$$

и определим $x_k \in L_k$ из следующего условия:

$$||b - Ax_k||_2 = \min_{z \in L_k} ||b - Az||_2.$$

Вектор $r(z) = b - Az$ называется *невязкой* вектора z. Очевидно, вычисление вектора x_k сводится к задаче о перпендикуляре, опущенном из вектора b на подпространство

$$M_k = AL_k = \{y \in \mathbb{C}^n : y = Az, \ z \in L_k\}.$$

Как решать такую задачу — мы уже знаем. Понятно также, что решение существенно облегчается наличием “удобного” базиса $p_1,\, \dots,\, p_k$ в L_k (например, приводящего к ортогональной системе $Ap_1,\, \dots,\, Ap_k$).

В условиях точных вычислений процесс всегда завершается получением решения x. Если $L_n = \mathbb{C}^n$, то, очевидно, $x_n = x$. Если на каком-то шаге $L_k = L_{k+1}$, то

$$AL_k \subset L_{k+1} = L_k \ \ \Rightarrow \ \ AL_k = L_k \quad \text{(в силу невырожденности матрицы } A).$$

Поскольку $b \in L_k$, то должно быть $Az = b$ для какого-то $z \in L_k$. Невырожденность A означает, что $z = x \ \ \Rightarrow \ \ x \in L_k \ \ \Rightarrow \ \ x_k = x$. Заметим также, что если $x \in L_k$ (а значит, $x_k = x$), то $L_k = L_{k+1}$ (докажите!).

Обратим внимание на то, что x_k часто оказывается хорошим приближением к решению x при $k \ll n$. Описанная идея является ключевой в современных методах решения систем в многочисленных прикладных задачах.

38.6 Метод сопряженных градиентов

Данная идея приобретает особенно элегантную форму в случае, когда A — эрмитова положительно определенная матрица.

Пусть x_0 — произвольный начальный вектор. Если $r_0 = b - Ax_0 = 0$, то решение найдено. Если $r_0 \neq 0$, начинаем строить подпространства Крылова

$$L_k = L(r_0,\, Ar_0,\, \dots,\, A^{k-1}r_0) = L(p_1,\, \dots,\, p_k),$$

последовательно получая в них базис $p_1,\, \dots,\, p_k$ со следующим свойством:

$$(Ap_i, p_j) = 0, \quad i \neq j; \qquad p_1 = r_0.$$

[2] Заметим, что L_k есть подпространство минимального инвариантного подпространства, порожденного вектором b. В Лекции 32 было доказано, что если $A^k b = 0$, то отличие от нуля векторов $b,\, Ab,\, \dots,\, A^{k-1}b$ влечет за собой их линейную независимость.

Поскольку $(x, y)_A = (Ax, y)$ есть скалярное произведение, данное свойство называется *свойством A-ортогональности* векторов $p_1,\, \dots,\, p_k$; *A-нормой* вектора x называется величина $||x||_A = \sqrt{(x, x)_A} = \sqrt{(Ax, x)}$.

Пусть x_k имеет вид $x_k = x_0 + y$, где $y \in L_k$ выбирается таким образом, чтобы минимизировать величину $||x - x_k||_A = ||(x - x_0) - y||_A$ (A-норму отклонения x_k от точного решения x). Ясно, что это задача о перпендикуляре в случае A-ортогональности. Поэтому y определяется из уравнений

$$((x - x_0) - y,\, p_i)_A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r_0 - Ay,\, p_i) = 0, \ \ 1 \leq i \leq k.$$

Записав $y = \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_k p_k$, находим $\alpha_i = (r_0,\, p_i)/(Ap_i,\, p_i)$. Следовательно, векторы x_k можно вычислять по очень простой рекуррентной формуле

$$x_k = x_{k-1} + \alpha_k p_k, \quad \alpha_k = (r_0,\, p_k)/(Ap_k,\, p_k).$$

Отсюда видно, что невязки $r_k = b - Ax_k$ связаны рекуррентной формулой

$$r_k = r_{k-1} - \alpha_k A p_k.$$

Удивительно и приятно то, что для вычисления x_k требуется лишь один вектор p_k из базиса $p_1,\, \dots,\, p_k$! Но еще более удивительно и приятно то, что p_{k+1} можно найти, используя лишь два вектора: p_k и r_k.

В самом деле, если $r_k = 0$, то решение найдено. [3]

Если же $r_k \neq 0$, то невязка $r_k = r_0 - Ay$ является ортогональной подпространству L_k и поэтому p_{k+1} можно записать в виде

$$p_{k+1} = r_k + \beta_1 p_1 + \ldots + \beta_k p_k.$$

Условие A-ортогональности дает равенства

$$(Ap_{k+1}, p_i) = 0 \ \ \Rightarrow \ \ \beta_i = (Ar_k, p_i)/((Ap_i, p_i), \ \ 1 \leq i \leq k.$$

При этом $(Ar_k, p_i) = (r_k, Ap_i) = 0$ при $i \leq k - 1$, так как вектор $Ap_i \in AL_i \subset L_{i+1}$. Таким образом, $\beta_i = 0$ при $1 \leq i \leq k - 1 \ \ \Rightarrow$

$$p_{k+1} = r_k + \beta_k p_k, \quad \beta_k = (r_k, Ap_k)/(Ap_k, p_k).$$

38.7 Двучленные формулы

Заметим, что для вычисления α_k совсем не обязательно использовать формулу $\alpha_k = (r_0,\, p_k)/(Ap_k,\, p_k)$. Поскольку $r_k \perp L_k$, находим $0 = (r_k,\, p_k) = (r_{k-1} - \alpha_k A p_k,\, p_k) \ \ \Rightarrow$

$$\alpha_k \ = \ \frac{(r_{k-1}, p_k)}{(Ap_k, p_k)} \ = \ \frac{(r_{k-1}, r_{k-1} + \beta_{k-1} p_{k-1})}{(Ap_k, p_k)} \ = \ \frac{(r_{k-1}, r_{k-1})}{(Ap_k, p_k)}.$$

Далее, если $r_{k-1} \neq 0$, то $\alpha_k \neq 0 \ \ \Rightarrow \ \ Ap_k = (r_{k-1} - r_k)/\alpha_k \ \ \Rightarrow$

$$\beta_k \ = \ \frac{(r_k, r_{k-1} - r_k)}{\alpha_k\, (Ap_k, p_k)} \ = \ -\frac{(r_k, r_k)}{(r_{k-1}, r_{k-1})}.$$

[3] В этом случае $L_k = L_{k+1}$ (докажите!).

Окончательно, *метод сопряженных градиентов* сводится к итерациям, выполняемым по следующим двучленным формулам:

$$\begin{aligned} x_k &= x_{k-1} + \alpha_k p_k, &\quad \alpha_k &= \frac{(r_{k-1}, r_{k-1})}{(Ap_k, p_k)}, \\ r_k &= r_{k-1} - \alpha_k A p_k, && \\ p_{k+1} &= r_k + \beta_k p_k, &\quad \beta_k &= -\frac{(r_k, r_k)}{(r_{k-1}, r_{k-1})}. \end{aligned}$$

Теоретически итерации выполняются до тех пор, пока $r_k \neq 0$. На практике они останавливаются, когда $||r_k||_2$ становится достаточно малой.

Наиболее сложное действие на k-м шаге метода сопряженных градиентов — это умножение заданной матрицы A на вектор. При этом совсем не обязательно хранить все n^2 элементов матрицы в каком-то массиве — требуется лишь наличие какой-то процедуры умножения матрицы на вектор. Именно в этом плане итерационные методы существенно отличаются от метода Гаусса, это же обстоятельство делает их особенно полезными при решении систем с очень большим числом неизвестных.